Capítulo 3

Series

3.1. Introducción.

El concepto de serie está relacionado con un problema muy antiguo de las Matemáticas: ¿es posible que la suma de infinitos términos positivos dé como resultado un número finito? La respuesta es afirmativa y sólo hay que definir correctamente el concepto de "suma infinita". En este capítulo se introducen las definiciones, propiedades básicas y algunos criterios de convergencia de series, con especial atención a las series de potencias.

3.2. Series de números reales.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ una sucesión de números reales. La suma $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ de los n primeros términos se llama suma parcial n-ésima de la sucesión. Se llama **serie** asociada a $\{x_n\}$ a la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

<u>Ejemplo:</u> Si $\{x_n\} = \{1/2^n\} = \{1/2, 1/2^2, 1/2^3, \dots\}$ entonces $s_1 = 1/2$, $s_2 = 1/2 + 1/4 = 3/4$, $s_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$. En general,

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1/2 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Denotaremos por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a la serie asociada a $\{x_n\}$.

Convergencia.

Diremos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **convergente** si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente, es decir, si existe $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = s$. Dicho límite se llama suma de la serie y se denota $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

En el ejemplo anterior,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Por tanto la serie es convergente y su suma es 1.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, diremos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ es **divergente**.

Por ejemplo, la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = 1$, $\forall\, n \geq 1$ proporciona la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ cuya sucesión de sumas parciales es $\{s_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ es divergente.

Series geométricas. El ejemplo usado antes es una de las pocas series cuya suma se puede calcular fácilmente. En general, si a es un número real, llamaremos serie geométrica de razón a a la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$. Es sencillo probar que dicha serie es convergente si $|a| < 1$ y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}.$$

<u>Observación.</u> El carácter convergente de una serie no varía si prescindimos de una cantidad finita de téminos, pero sí varía la suma en el caso de que sea convergente. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Propiedades:

1. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ son convergentes entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ también es convergente y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

2. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)$ también es convergente y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

3. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente entonces necesariamente $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

   Esta propiedad es útil para concluir que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no puede ser convergente si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)/n)$ no puede ser convergente porque $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-1)/n = 1 \neq 0$. El hecho de que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ no garantiza que la serie sea convergente. Como veremos a continuación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ es divergente a pesar de que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

3.3. Series de términos positivos. Criterios de convergencia.

En esta sección consideraremos series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de términos positivos, es decir, $x_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$.

I. Criterio de la integral.

Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

a) f es decreciente.

b) $f(x) > 0$, $\forall\, x > 1$.

Entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si y sólo si la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente.

Además, en caso de que sean convergentes, se tienen las siguientes desigualdades:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Aplicación: Por comparación con la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} (1/x^{\alpha})\, dx$, se deduce del criterio de la integral que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \in (0, 1]$.

Por ejemplo, la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ es divergente, mientras que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ es convergente y además, como $\displaystyle\int_1^{\infty} 1/x^2 dx = 1$, se cumplen las desigualdades

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

II. Criterios de comparación.

Como en el caso de las integrales impropias, consideraremos dos tipos de criterios de comparación: uno directo y otro por paso al límite.

Criterio 1. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq 1$. Entonces:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y además $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2(n)/3^n$ converge y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

Criterio 2. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

a) Si $l \in (0, \infty)$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $l = \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

c) $l = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Por ejemplo, consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-\sqrt{n})/(n^2+n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+1} = 1 > 0,$$

se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n}$ diverge.

III. Criterio del cociente.

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Entonces:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

IV. Criterio de la raíz.

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Entonces:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

3.4. Convergencia absoluta.

Diremos que una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente.

Teniendo en cuenta la desigualdad triangular, se tiene el siguiente resultado:

Propiedad. Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Esta propiedad permite aplicar los criterios de convergencia para series de términos positivos a series arbitrarias. En particular, tenemos la siguiente generalización del criterio del cociente:

Criterio del cociente generalizado.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie de números reales. Supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$. Entonces:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no converge.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$, el criterio no decide la convergencia de la serie.

Observación: se puede formular un criterio similar usando el criterio de la raíz con $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$.

En algunos casos es posible probar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a pesar de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es divergente.

Criterio de Leibniz.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de términos positivos decreciente tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ es convergente.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente ya que la sucesión $\{1/n\}$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Sin embargo, la serie no es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que, como hemos visto, es divergente.

3.5. Series de potencias.

Se llama **serie de potencias** con coeficientes $\{a_n\}_{n\geq 0}$ centrada en x_0 a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Las series de potencias se pueden considerar como una generalización de los polinomios ("de grado infinito"). Una serie de potencias define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ en el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los que es convergente. Este conjunto se llama intervalo de convergencia de la serie y en general es un intervalo centrado en x_0. El siguiente resultado es una consecuencia del criterio del cociente generalizado:

Teorema 3.1 Supongamos que existe $l = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

a) Si l es un número real positivo entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ es absolutamente convergente para $x \in (x_0-r, x_0+r)$, donde $r = 1/l$ se llama **radio de convergencia** de la serie. Fuera del intervalo cerrado $[x_0-r, x_0+r]$ la serie es divergente y en los extremos puede ser convergente o divergente.

b) Si $l = \infty$ entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ sólo converge para $x = x_0$ (se dice que el radio de convergencia es cero).

c) Si $l = 0$ entonces la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$ (se dice que el radio de convergencia es infinito).

<u>Observación:</u> se puede formular un resultado completamente análogo usando el criterio de la raíz, con $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Derivación e integración de series de potencias.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie de potencias convergente en el intervalo (x_0-r, x_0+r). Entonces se puede definir la función $f : (x_0-r, x_0+r) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Esta función tiene las siguientes propiedades:

1. f es derivable en (x_0-r, x_0+r) y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n(x-x_0)^{n-1}$.

2. f es integrable y además una primitiva de f es

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

<u>Ejemplo:</u> Sabemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es convergente para $x \in (-1,1)$ y además

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)}.$$

Si denotamos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$, se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\,,\ \forall\, x \in (-1,1).$$

Series de Taylor.

Sea f una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un entorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ de un número real x_0. Entonces se puede calcular el polinomio de Taylor de cualquier orden $k \geq 1$:

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Si consideramos la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, con $a_n = f^{n)}(x_0)/n!$ y r es el radio de convergencia de esta serie entonces se puede definir la función

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \forall\, x \in (x_0-r, x_0+r). \tag{3.1}$$

Dado que $f(x) = p_k(x) + r_k(x)$, donde

$$r_k(x) = \frac{f^{k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1},$$

con ξ_x entre x_0 y x, si $\lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0$, $\forall\, x \in (x_0-r, x_0+r)$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty}(f(x) - p_k(x)) = \lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0$$

y por tanto

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} p_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ \forall\, x \in (x_0-r, x_0+r). \tag{3.2}$$

Es decir, f es precisamente la función g definida en (3.1). La expresión (3.2) se llama **desarrollo en serie de Taylor** de la función f centrado en x_0.

Ejemplo 1: El desarrollo en serie de Taylor de la función e^x centrado en $x_0 = 0$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En efecto, veamos primero que el radio de convergencia de la serie es infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Longrightarrow r = \infty.$$

Ahora probamos que $\lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Como $f^{k)}(x) = e^x,\ \forall\, k \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$|r_k(x)| = \left| \frac{f^{k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!} \right| |x|^{k+1} = \left| \frac{e^{\xi_x}}{(k+1)!} \right| |x|^{k+1} \leq \frac{e^{|x|}|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Usando el criterio del cociente para la convergencia de sucesiones, se prueba que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{|x|}|x|^{k+1}}{(k+1)!} = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

De aquí se deduce que $\lim_{k\to\infty} |r_k(x)| = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2: El desarrollo en serie de Taylor de la función $\ln(1+x)$ centrado en $x_0 = 0$ es

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ \forall\, x \in (-1,1).$$

En este caso se obtiene directamente usando la fórmula de integración de una serie de potencias.

Como $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x),\ \forall\, x \in (-1,1)$, se puede definir la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x},\ \forall\, x \in (-1,1).$$

Una primitiva de $f(x) = 1/(1+x)$ es $F(x) = \ln(1+x)$. Por otra parte, usando la expresión anterior:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Como dos primitivas de la misma función se diferencian en una constante, necesariamente existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + C.$$

La constante C se determina evaluando los dos miembros de la igualdad en $x = 0$:

$$0 = \ln(1+0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{n+1}}{n+1} + C = C.$$

Finalmente, tomando $k = n+1$, se obtiene:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k},\ \forall\, x \in (-1,1).$$

Referencias

Agunos libros donde buscar más información, incluidas las demostraciones que faltan

- Gerald L. Bradley y Karl J. Smith, "Cálculo de una variable, Volumen I", Ed. Prentice Hall, 1998.
- Juan de Burgos, "Cálculo infinitesimal de una variable", Ed. Mc Graw-Hill, 1994.
- Serge Lang, "Cálculo", Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
- James Stewart, "Cálculo. Conceptos y contextos", 3a. ed., Thompson, 2006.