LA INTEGRAL

UNIDAD IV

IV.1 SUMA DE RIEMANN

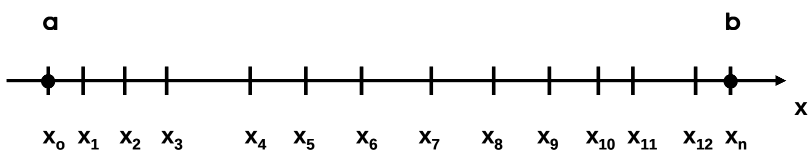
Sea un intervalo cerrado $[a,b]$, al conjunto de puntos $P_n = \{ x_o, x_1, x_2, \cdots, x_n \}$ contenidos en dicho intervalo se le conoce como *partición* del intervalo $[a,b]$.

Esto implica que: $x_0 = a, \quad x_n = b, \quad x_{i-1} < x_i$ donde $i = 1,2,3,4,\cdots n$

A cada subintervalo se le conoce como *celda*. A la distancia entre los puntos extremos de cada celda se le conoce como *amplitud de la celda*.

La amplitud de la primera celda es: $\Delta_1 x = x_1 - x_0$
La amplitud de la segunda celda es: $\Delta_2 x = x_2 - x_1$
La amplitud de la tercera celda es: $\Delta_3 x = x_3 - x_2$

Gráficamente:



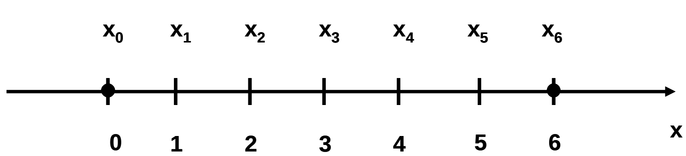
Como se puede advertir, la amplitud de las celdas viene dado por la diferencia de sus valores finales e iniciales. Por lo tanto, en general, la amplitud de cada celda viene dada por:

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

A la mayor amplitud de las celdas de una partición se le denomina *norma de la partición* y se le denota por $\|\Delta\|$.

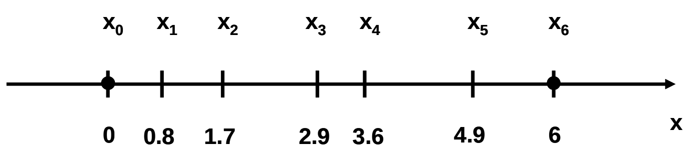
Ejemplo.
Dado el intervalo $[0,6]$, efectuar dos particiones diferentes de seis celdas y en cada caso determinar cuál es su norma.

Solución.
a) Si se hace una partición de igual amplitud:



$\Delta_1 x = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$
$\Delta_2 x = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$
$\Delta_3 x = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1$
$\Delta_4 x = x_4 - x_3 = 4 - 3 = 1$
$\Delta_5 x = x_5 - x_4 = 5 - 4 = 1$
$\Delta_6 x = x_6 - x_5 = 6 - 5 = 1$
$\therefore$ su norma es $\|\Delta\| = 1$

b) Se hace una partición de la manera que se indica:



$\Delta_1 x = x_1 - x_0 = 0.8 - 0 = 0.8$
$\Delta_2 x = x_2 - x_1 = 1.7 - 0.8 = 0.9$
$\Delta_3 x = x_3 - x_2 = 2.9 - 1.7 = 1.2$
$\Delta_4 x = x_4 - x_3 = 3.6 - 2.9 = 0.7$
$\Delta_5 x = x_5 - x_4 = 4.9 - 3.6 = 1.3$
$\Delta_6 x = x_6 - x_5 = 6 - 4.9 = 1.1$
$\therefore$ la norma de esta partición es $\|\Delta\| = 1.3$

Sea una función $y = f(x)$ definida y limitada en un conjunto D. Considérese una partición en dicho conjunto que contenga n subintervalos. Si se escoge un punto ξ en cada subintervalo de la partición de forma tal que:

$\xi_1 \in [x_0, x_1]$ o bien: $x_0 \le \xi_1 \le x_1$
$\xi_2 \in [x_1, x_2]$ o bien: $x_1 \le \xi_2 \le x_2$
$\xi_3 \in [x_2, x_3]$ o bien: $x_2 \le \xi_3 \le x_3$
y en general:
$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ o bien: $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$

Si se forma la suma de productos del valor de f en cada punto ξ por la amplitud de la celda respectiva, se tendrá:

$$f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x + \cdots + f(\xi_i)\Delta_i x + \cdots + f(\xi_n)\Delta_n x$$

que en forma concentrada se puede representar como:

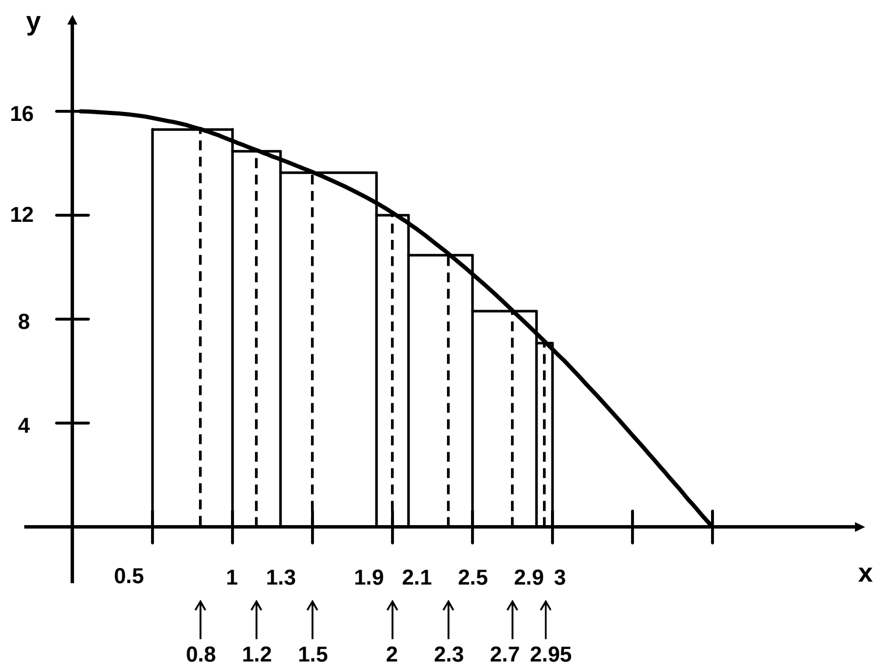
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

expresión que se conoce como *Suma de Riemann*.

Esta expresión calcula la suma de cada una de las bases (las celdas, Δx) por su respectiva altura (que son las $f(\xi)$) de una función, dada una partición. Esto determina la suma de las áreas de los rectángulos formados.

Ejemplo.
Dada la función $y=-x^2+16$ con $0.5 \le x_1 \le 3$, obtener la suma de Riemann para la función dada la partición: $x_0 = 0.5, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1.3, \quad x_3 = 1.9, \quad x_4 = 2.1, \quad x_5 = 2.5, \quad x_6 = 2.9, \quad x_7 = 3$

Solución:
Los puntos elegidos de cada celda son:
$\xi_1 = 0.8, \quad \xi_2 = 1.2, \quad \xi_3 = 1.5, \quad \xi_4 = 2, \quad \xi_5 = 2.3, \quad \xi_6 = 2.7, \quad \xi_7 = 2.95$
Graficando se tiene:



La suma de Riemann es:

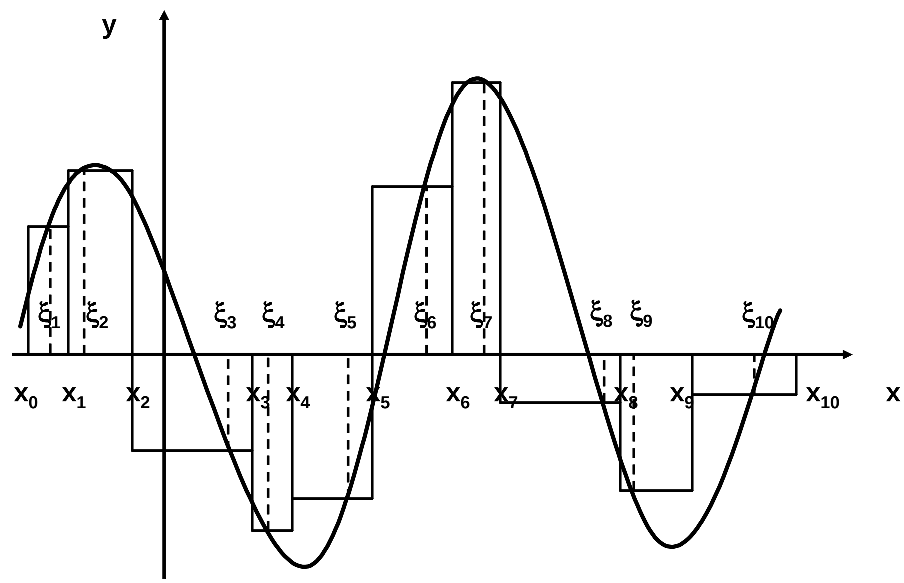
$$\sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)\Delta_i x = f(\xi_1)\Delta_1 x + f(\xi_2)\Delta_2 x + f(\xi_3)\Delta_3 x + f(\xi_4)\Delta_4 x + f(\xi_5)\Delta_5 x + f(\xi_6)\Delta_i x + f(\xi_7)\Delta_7 x$$

$$= f(0.8)(1-0.5) + f(1.2)(1.3-1) + f(1.5)(1.9-1.3) + f(2)(2.1-1.9) + f(2.3)(2.5-2.1) +$$
$$f(2.7)(2.9-2.5) + f(2.95)(3-2.9)$$
$$= 15.36(0.5) + 14.56(0.3) + 13.75(0.6) + 12(0.2) + 10.71(0.4) + 8.71(0.4) + 7.29(0.1)$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)\Delta_i x = 31.195$$

y $\|\Delta\| = 0.6$.

En el caso siguiente:



se aprecia que algunas de las áreas son negativas, por lo tanto, la interpretación geométrica de la suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

puesto que $f(\xi_3), f(\xi_4), f(\xi_5), f(\xi_8), f(\xi_9), f(\xi_{10})$ son números negativos.

IV.2 INTEGRAL DEFINIDA

Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la integral definida de f de a a b se define como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \quad \text{(si el límite existe)}$$

$f(x)$ se llama integrando.
a y b son los extremos o límites de integración (a es el extremo inferior y b es el extremo superior)
$\int$ se llama signo de integración.

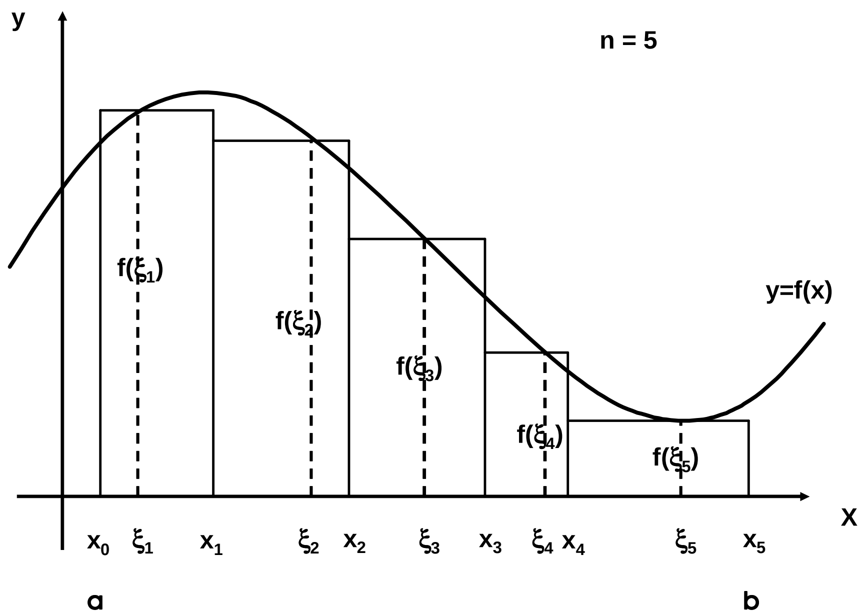
Si $\|\Delta\| \to 0$ implica que $n \to \infty$, por lo tanto:

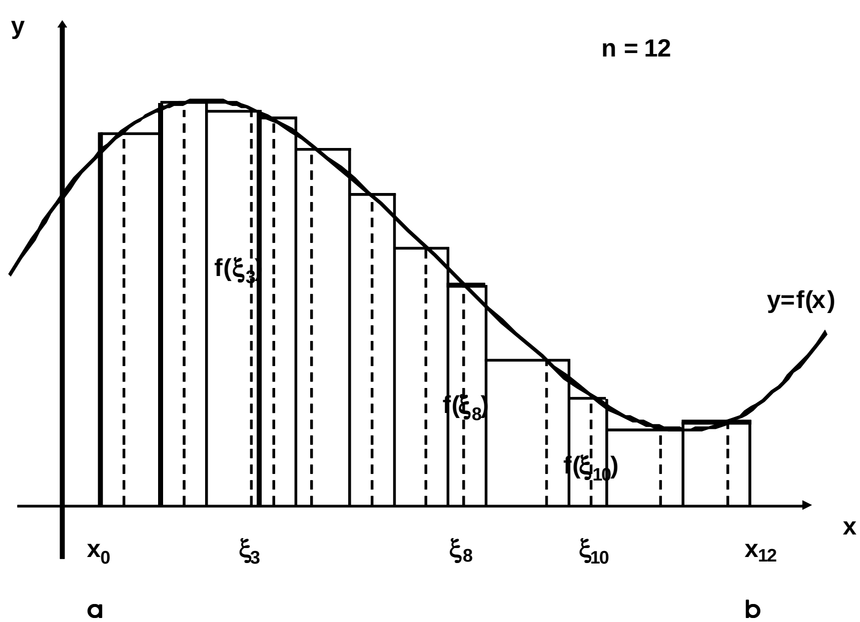
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

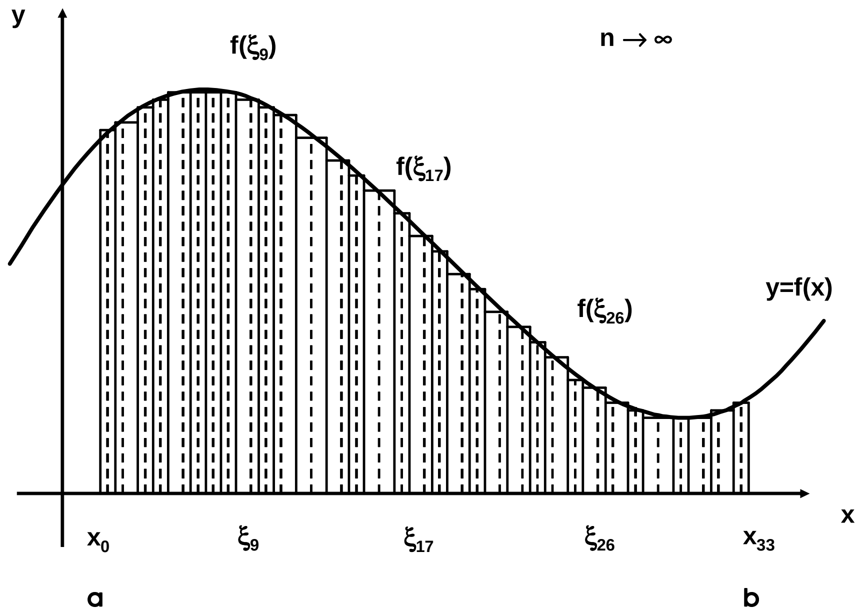
IV.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$ representa la suma de los n rectángulos. Si la norma de la partición tiende a cero implica que el número de celdas se incrementa, es decir que cada vez se tienen más y más rectángulos que se aproximan al área real bajo la curva.

Por lo tanto, por definición: *la integral definida es el área bajo la curva en sus límites*.







Las figuras anteriores muestran como la suma de rectángulos se aproxima al área real bajo la curva si $n \to \infty$.

Ejemplo.

Obtener $\int_1^4 x^2\, dx$ en forma aproximada utilizando una partición de ocho celdas.

Solución.

Efectuando la partición:

$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.25, \quad x_2 = 1.5, \quad x_3 = 1.75, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 2.5, \quad x_6 = 3, \quad x_7 = 3.5, \quad x_8 = 4$

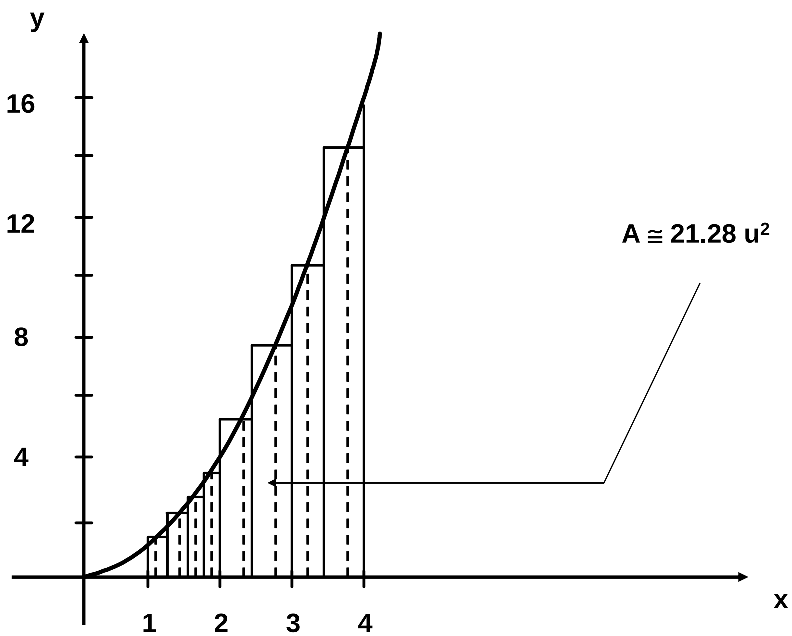
los puntos elegidos de cada celda son:

$\xi_1 = 1.1, \quad \xi_2 = 1.3, \quad \xi_3 = 1.6, \quad \xi_4 = 1.8, \quad \xi_5 = 2.4, \quad \xi_6 = 2.8, \quad \xi_7 = 3.25, \quad \xi_8 = 3.75$

$$\int_1^4 x^2\, dx = f(1.1)[1.25-1] + f(1.3)[1.5-1.25] + f(1.6)[1.75-1.5] + f(1.8)[2-1.75] + f(2.4)[2.5-2] +$$
$$f(2.8)[3-2.5] + f(3.25)[3.5-3] + f(3.75)[4-3.5]$$
$$= 1.21(0.25) + 1.69(0.25) + 2.56(0.25) + 3.24(0.25) + 5.76(0.5) + 7.84(0.5) + 10.5625(0.5)$$
$$+14.0625(0.5)$$

$$\therefore \int_1^4 x^2\, dx \cong 21.28\, u^2.$$

graficando se tiene:



IV.4 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo de integración $[a,b]$ y k una constante cualquiera:

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b k\ f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ cuando $a < c < b$

IV.5 INTEGRAL INDEFINIDA O ANTIDERIVADA

Una función F será antiderivada, o primitiva, de otra función f en un intervalo $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en el intervalo.

Esto es, si $F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x)$

Ejemplo.

Sea $f(x)=5x^3+12x^2-10x$. Eso implica: $f'(x)=15x^2+24x-10$

La antiderivada de esta función es la función original $f(x)$. Esto significa que:

$$\int (15x^2+24x-10)\,dx=5x^3+12x^2-10x$$

La función $f(x)$ tiene una antiderivada particular $[a,b]$ que es $F(x)$.

La antiderivada general de $f(x)$ es:

$$F(x)+C$$

donde C es una constante.

Ejemplo.

Sea $f(x)=9x^2+7x-4 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=18x+7$

$\int (18x+7)\,dx=9x^2+7x+C$

IV.6 FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE INTEGRACIÓN

Si $u,\ v,\ w$ tres funciones de x y a una constante cualquiera. Las 27 fórmulas fundamentales de integración son:

1) $\int du=u+C$

2) $\int (u\pm v\pm w)\,dx=\int u\,dx\pm\int v\,dx\pm\int w\,dx$

3) $\int au\,du=a\int u\,du$

4) $\int u^n du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n\neq -1)$

5) $\int sen\,u\,du=-\cos u+C$

6) $\int \cos u\,du=sen\,u+C$

7) $\int \tan u\,du=\ln|\sec u|+C$

8) $\int \cot u\,du=\ln|sen\,u|+C$

9) $\int \sec u\,du=\ln|\sec u+\tan u|+C$

10) $\int \csc u\,du=\ln|\csc u-\cot u|+C$

11) $\int \sec^2 u\,du=\tan u+C$

12) $\int \csc^2 u\,du=-\cot u+C$

13) $\int \sec u\tan u\,du=\sec u+C$

14) $\int \csc u\cot u\,du=-\csc u+C$

15) $\int e^u\,du=e^u+C$

16) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

17) $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1)$

18) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = sen^{-1}\frac{u}{a} + C$

19) $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

20) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + C$

21) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

22) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

23) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

24) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

25) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2}a^2 sen^{-1}\frac{u}{a} + C$

26) $\int \sqrt{u^2 + a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$

27) $\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

IV.7 INTEGRALES DIRECTAS E INTEGRALES QUE REQUIEREN CAMBIO DE VARIABLE

Una integral directa es aquella que se adapta exactamente al integrando con una de las fórmulas fundamentales. Sin embargo, la gran mayoría no son directas, por tanto, antes de integrar se debe completar la diferencial du para adaptarla a una fórmula, lo que obliga a hacer intervenir una constante que multiplique y divida a la integral. En seguida, se extrae de la integral a la constante que no haga falta para completar la diferencial du tal y como lo indica la fórmula número 3.

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales inmediatas:

1) $\int dx = x + C$

2) $\int 4\,dx = 4x + C$

3) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

4) $\int 8x^5\,dx = \frac{8x^6}{6} + C$

5) $\int \left(12x^5 + 13x^4 - 11x^3 - 10x^2 + 7x - 8\right)dx = \frac{12x^6}{6} + \frac{13x^5}{5} - \frac{11x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 8x + C$

6) $\int \frac{2}{x^4}\,dx = \int 2x^{-4}dx = \frac{2x^{-3}}{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$

7) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

8) $\int \sqrt[11]{x^7}\,dx = \int x^{\frac{7}{11}}dx = \frac{x^{\frac{18}{11}}}{\frac{18}{11}} + C = \frac{11}{18}\sqrt[11]{x^{18}} + C$

9) $\int \frac{-9}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx = \int \frac{-9}{x^{\frac{5}{3}}}\,dx = \int -9x^{-\frac{5}{3}}dx = \frac{-9x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C = \frac{27}{2x^{\frac{2}{3}}} + C = \frac{27}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$

10) $\int \left(\frac{x^3 - 5x^2 - 4}{x^2}\right)dx = \int \left(x - 5 - \frac{4}{x^2}\right)dx = \int \left(x - 5 - 4x^{-2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{4}{x} + C$

11) $\int \left(\frac{4x^3 - 10x^2 - 16x - 14}{2x^5}\right)dx = \int \left(2x^{-2} - 5x^{-3} - 8x^{-4} - 7x^{-5}\right)dx$

$= \frac{2x^{-1}}{-1} - \frac{5x^{-2}}{-2} - \frac{8x^{-3}}{-3} - \frac{7x^{-4}}{-4} + C = -\frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} + \frac{8}{3x^3} + \frac{7}{4x^4} + C$

12) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(1+x)^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int \frac{1 + 2x + x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$

$= 2\sqrt{x} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales efectuando cambio de variable:

13) $\int \left(x^3 + 2\right)^2 3x^2\,dx \qquad u = x^3 + 2 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2\,dx$

$$\Rightarrow \int u^2\ du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$$

14) $\int \frac{8x^4}{(x^5+6)^7} dx$ $\qquad u = x^5 + 6 \quad \Rightarrow \quad du = 5x^4\ dx$

$$\Rightarrow \frac{8}{5}\int \frac{du}{u^7} = \frac{8}{5}\int u^{-7} du = \left(\frac{8}{5}\right)\frac{u^{-6}}{-6} + C = \frac{8}{-30u^6} = -\frac{8}{30(x^5+6)^6} + C$$

15) $\int (x^3+2)^{\frac{1}{2}}\ x^2\ dx$ $\qquad u = x^3 + 2 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\ du = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{(x^3+2)^3}}{9} + C$$

16) $\int \frac{8x^2}{(x^3+17)^3} dx$ $\qquad u = x^3 + 17 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2\ dx$

$$\Rightarrow \frac{8}{3}\int \frac{du}{u^3} = \frac{8}{3}\int u^{-3} du = \left(\frac{8}{3}\right)\frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{8}{-6u^2} = -\frac{4}{3(x^3+17)^2} + C$$

17) $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}} dx$ $\qquad u = x^2 + 6x \quad \Rightarrow \quad du = (2x+6)\, dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}} du = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+6x)^2} + C$$

18) $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\ dx$

$$= \int (x^2 - 2x^4)^{\frac{1}{2}}\ dx = \int \left[x^2(1-2x^2)\right]^{\frac{1}{2}}\ dx = \int x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$u = 1 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad du = -4x\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{-4}\int u^{\frac{1}{2}}\ du = \left(\frac{1}{-4}\right)\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2\sqrt{(1-2x^2)^3}}{12} + C$$

19) $\int sen\ 4x\ dx$

$u = 4x \quad \Rightarrow \quad du = 4\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int sen\, u\ du = -\frac{1}{4}\cos u + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C$$

20) $\int \cos \frac{1}{2} x\ dx$

$u = \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{2}\ dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}}\int \cos u\,du = 2\,sen\,u + C = 2\,sen\,\frac{1}{2}x + C$$

21) $\int \tan 5x\,dx$

$u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int \tan u\,du = \frac{1}{5}\ln\left|\sec u\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\sec 5x\right| + C$$

22) $\int x \cot x^2\,dx$

$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \cot u\,du = \frac{1}{2}\ln\left|sen\,u\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|sen\,x^2\right| + C$$

23) $\int \sec 11x\,dx$

$u = 11x \quad \Rightarrow \quad du = 11\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{11}\int \sec u\,du = \frac{1}{11}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + C = \frac{1}{11}\ln\left|\sec 11x + \tan 11x\right| + C$$

24) $\int 7x \csc 10x^2\,dx$

$u = 10x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 20x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{7}{20}\int \csc u\,du = \frac{7}{20}\ln\left|\csc u - \cot u\right| + C = \frac{7}{20}\ln\left|\csc 10x^2 - \cot 10x^2\right| + C$$

25) $\int \sec^2 8x\,dx$

$u = 8x \quad \Rightarrow \quad du = 8\,dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{8}\tan u + C = \frac{1}{8}\tan 8x + C$$

26) $\int 5x \sec 7x^2\,\tan 7x^2\,dx$

$u = 7x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 14x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{5}{14}\int \sec u\,\tan u\,du = \frac{5}{14}\sec u + C = \frac{5}{14}\sec 7x^2 + C$$

27) $\int 17w^3\,\csc 13w^4\,\cot 13x^4\,dw$

$u = 13w^4 \quad \Rightarrow \quad du = 52w^3\,dw$

$$\Rightarrow \frac{17}{52}\int \csc u\,\cot u\,du = -\frac{17}{52}\csc u + C = -\frac{17}{52}\csc 13w^4 + C$$

28) $\int 15k^6\,\csc^2 4k^7\,dk$

$u = 4k^7 \quad \Rightarrow \quad du = 28k^6\,dk$

$$\Rightarrow \frac{15}{28}\int \csc^2 u\,du = -\frac{15}{28}\cot u + C = -\frac{15}{28}\cot 4k^7 + C$$

29) $\int 10\,e^{5x}\,dx$

$u = 5x \quad \Rightarrow \quad du = 5\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{10}{5}\int e^{u}\,du = 2e^{u} + C = 2e^{5x} + C$

30) $\displaystyle\int \frac{1}{19}\cos 6x\, e^{sen\,6x}\,dx$

$u = sen\,6x \quad \Rightarrow \quad du = 6\cos 6x\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{1}{19(6)}\int e^{u}\,du = \dfrac{1}{114}e^{u} + C = \dfrac{1}{114}e^{sen\,6x} + C$

31) $\displaystyle\int \frac{13}{9}x^{4}e^{10x^{5}}\,dx$

$u = 10x^{5} \quad \Rightarrow \quad du = 50x^{4}\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{13}{9(50)}\int e^{u}\,du = \dfrac{13}{450}e^{u} + C = \dfrac{13}{450}e^{10x^{5}} + C$

32) $\displaystyle\int \frac{2x^{2}}{3+6x^{3}}\,dx$

$u = 3 + 6x^{3} \quad \Rightarrow \quad du = 18x^{2}\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{2}{18}\int \dfrac{du}{u} = \dfrac{2}{18}\ln|u| + C = \dfrac{2}{18}\ln\left|3+6x^{3}\right| + C$

33) $\displaystyle\int \frac{sen\,5x}{\cos 5x}\,dx$

$u = \cos 5x \quad \Rightarrow \quad du = -5sen\,5x\,dx$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{5}\int \dfrac{du}{u} = -\dfrac{1}{5}\ln|u| + C = -\dfrac{1}{5}\ln|\cos 5x| + C$

34) $\displaystyle\int \frac{3\left(8x+11x^{2}\right)^{2}(8+22x)}{\left(8x+11x^{2}\right)^{3}}\,dx$

$u = \left(8x+11x^{2}\right)^{3} \quad \Rightarrow \quad du = 3\left(8x+11x^{2}\right)^{2}(8+22x)\,dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\left(8x+11x^{2}\right)^{3}\right| + C$

35) $\displaystyle\int 5^{6x}\,dx$

$u = 6x \quad \Rightarrow \quad du = 6\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{1}{6}\int 5^{u}\,du = \dfrac{1}{6}\dfrac{5^{u}}{\ln 5} + C = \dfrac{1}{6}\dfrac{5^{6x}}{\ln 5} + C$

36) $\displaystyle\int 3x^{8}\,9^{17x^{9}}\,dx$

$u = 17x^{9} \quad \Rightarrow \quad du = 153x^{8}\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{3}{153}\int 9^{u}\,du = \dfrac{3}{153}\dfrac{9^{u}}{\ln 9} + C = \dfrac{3}{153}\dfrac{9^{17x^{9}}}{\ln 9} + C$

37) $\int \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$a^2=4 \quad \Rightarrow \quad a=2; \quad u^2=x^2 \quad \Rightarrow \quad u=x \quad \Rightarrow \quad du=dx$

$\Rightarrow \; 6\int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}}=6sen^{-1}\frac{u}{2}+C=6sen^{-1}\frac{x}{2}+C$

38) $\int \frac{-9}{16+25x^2}\,dx$

$a^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=4; \quad u^2=25x^2 \quad \Rightarrow \quad u=5x \quad \Rightarrow \quad du=5\,dx$

$\Rightarrow \; -\frac{9}{5}\int \frac{du}{4^2+u^2}=-\frac{9}{5}\left(\frac{1}{4}\right)\tan^{-1}\frac{u}{4}+C=-\frac{9}{20}\tan^{-1}\frac{5x}{4}+C$

39) $\int \frac{15x}{x^2\sqrt{x^4-81}}\,dx$

$a^2=81 \quad \Rightarrow \quad a=9; \quad u^2=x^4 \quad \Rightarrow \quad u=x^2 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx$

$\Rightarrow \; \frac{15}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-9^2}}=\frac{15}{2}\left(\frac{1}{9}\right)\sec^{-1}\frac{u}{9}+C=\frac{15}{18}\sec^{-1}\frac{x^2}{9}+C$

40) $\int \frac{10x^2}{49x^6-36}\,dx$

$a^2=36 \quad \Rightarrow \quad a=6; \quad u^2=49x^6 \quad \Rightarrow \quad u=7x^3 \quad \Rightarrow \quad du=21x^2\,dx$

$\Rightarrow \; \frac{10}{21}\int \frac{du}{u^2-6^2}=\frac{10}{21}\left(\frac{1}{2(6)}\right)\ln\left|\frac{u-6}{u+6}\right|+C=\frac{10}{252}\ln\left|\frac{7x^3-6}{7x^3+6}\right|+C$

41) $\int \frac{x^3}{x^8-10}\,dx$

$a^2=10 \quad \Rightarrow \quad a=\sqrt{10}; \quad u^2=x^8 \quad \Rightarrow \quad u=x^4 \quad \Rightarrow \quad du=4x^3\,dx$

$\Rightarrow \; \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{10}\right)}\right)\ln\left|\frac{u-\sqrt{10}}{u+\sqrt{10}}\right|+C=\frac{1}{8\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{10}}{x^4+\sqrt{10}}\right|+C$

42) $\int \frac{9x^5}{49-4x^{12}}\,dx$

$a^2=49 \quad \Rightarrow \quad a=7; \quad u^2=4x^{12} \quad \Rightarrow \quad u=2x^6 \quad \Rightarrow \quad du=12x^5\,dx$

$\Rightarrow \; \frac{9}{12}\int \frac{du}{7^2-u^2}=\frac{9}{12}\left(\frac{1}{2(7)}\right)\ln\left|\frac{7+u}{7-u}\right|+C=\frac{9}{168}\ln\left|\frac{7+2x^6}{7-2x^6}\right|+C$

43) $\int \frac{-3x^4}{\sqrt{4+x^{10}}}\,dx$

$a^2=4 \quad \Rightarrow \quad a=2; \quad u^2=x^{10} \quad \Rightarrow \quad u=x^5 \quad \Rightarrow \quad du=5x^4\,dx$

$\Rightarrow \; -\frac{3}{5}\int \frac{du}{\sqrt{2^2+u^2}}=-\frac{3}{5}\ln\left|u+\sqrt{u^2+2^2}\right|+C=-\frac{3}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}+4}\right|+C$

44) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{sen^2\ x-25}}\,dx$

$a^2=25 \quad\Rightarrow\quad a=5; \quad u^2=sen^{\,2}x \quad\Rightarrow\quad u=sen\ x \quad\Rightarrow\quad du=\cos x\,dx$

$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2-5^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2-5^2}\right|+C=\ln\left|sen\ x+\sqrt{sen^2\ x-25}\right|+C$

45) $\int \sqrt{100-64x^2}\,dx$

$a^2=100 \quad\Rightarrow\quad a=10; \quad u^2=64x^2 \quad\Rightarrow\quad u=8x \quad\Rightarrow\quad du=8\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{8}\int\sqrt{10^2-u^2}=\frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{2}\right)u\sqrt{10^2-u^2}+\frac{1}{2}(10)^2 sen^{-1}\frac{u}{10}\right)+C$

$=\frac{8x}{16}\sqrt{100-64x^2}+\frac{100}{16}sen^{-1}\frac{8x}{10}+C$

46) $\int \sqrt{3x^2+5}\,dx$

$a^2=5 \quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{5}; \quad u^2=3x^2 \quad\Rightarrow\quad u=\sqrt{3}x \quad\Rightarrow\quad du=\sqrt{3}\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\int\sqrt{u^2+5^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{1}{2}\right)u\sqrt{u^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{1}{2}(5)\ln\left|u+\sqrt{u^2+5}\right|\right)+C$

$=\frac{x}{2}\sqrt{3x^2+5}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+5}\right|+C$

47) $\int \sqrt{x^2-36}\,dx$

$a^2=36 \quad\Rightarrow\quad a=6; \quad u^2=x^2 \quad\Rightarrow\quad u=x \quad\Rightarrow\quad du=dx$

$\Rightarrow \int\sqrt{u^2-6^2}=\frac{1}{2}u\sqrt{u^2-6^2}-\frac{1}{2}\left(6^2\right)\ln\left|u+\sqrt{u^2-6^2}\right|+C$

$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-36}-18\ln\left|x+\sqrt{x^2-36}\right|+C$

IV.8 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. REGLA DE BARROW

Si $y=f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y si $g(x)$ cumple que $\frac{dg(x)}{dx}=f(x)\ \ \forall x\ \ [a,b]$ entonces, el *teorema fundamental del cálculo*[1] establece que:

$$\int_a^b f(x)\,dx=g(b)-g(a)$$

Expresión conocida como *Regla de Barrow*.

Ejemplos.

[1] La demostración de los teoremas expuestos en los Subtemas VI.10 y VI.11 pueden consultarse en el capítulo 7 del libro *Cálculo con Geometría Analítica* de Protter y Morrey incluido en la bibliografía.

Calcular las siguientes integrales:

1) $\int_{1}^{3} x^2\ dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \cong 8.66$

2) $\int_{-2}^{5} \left(6x^3 - 8x^2 + 7x - 2\right) dx = \left.\frac{6}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x\right|_{x=-2}^{x=5}$

$= \left[\frac{6}{4}(625) - \frac{8}{3}(125) + \frac{7}{2}(25) - 2(5)\right] - \left[\frac{6}{4}(16) - \frac{8}{3}(-8) + \frac{7}{2}(4) + 2(-2)\right]$

$= 937.5 - 333.33 + 87.5 - 10 - 24 - 21.33 - 14 + 4 \cong 626.33$

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\ dx = sen\ x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = sen\ \frac{\pi}{4} - sen\ 0 = 0.7071 - 0 = 0.7071$

4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen\ x \cos^2 x\ dx$

Con cambio el variable:

$u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -sen\ x\ dx$

se cambian los límites de integración: $u_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0; \quad u_2 = \cos 0 = 1$

$= \frac{1}{-1}\int_{1}^{0} u^2\ du = -\left.\frac{u^3}{3}\right|_{u=1}^{u=0} = \left(-\frac{0^3}{3}\right) - \left(-\frac{1^3}{3}\right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Comprobando (sin cambio de variable):

$= -\left.\frac{\cos^3 x}{3}\right|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{0^3}{3}\right) - \left(-\frac{1^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$

La integral indefinida de la función continua $y = f(x)$, formalmente se define como:

$$\int_{a}^{x} F(x)\,dx + C$$

Ejemplo.

Sea $F(x) = 6x + 8$

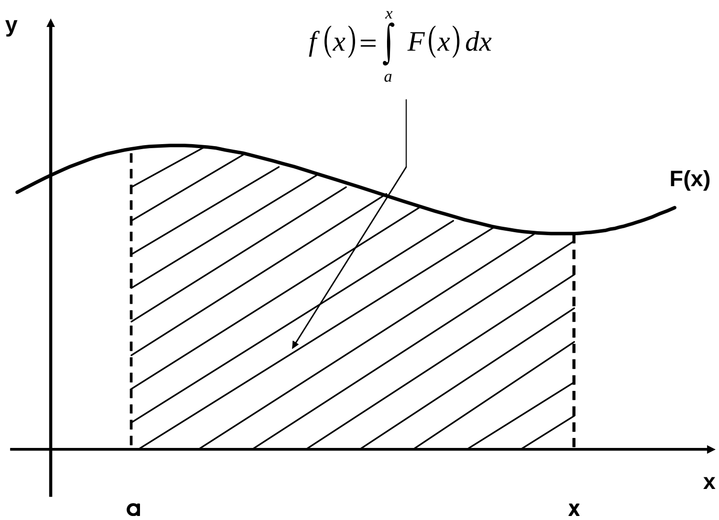
$\int_{-3}^{x} F(x)\,dx = \int_{-3}^{x} (6x+8)\,dx = \left.\frac{6}{2}x^2 + 8x\right|_{-3}^{x} = 3x^2 + 8x - \left(3(-3)^2 + 8(-3)\right) = 3x^2 + 8x - 3$

$\therefore \quad f(x) = 3x^2 + 8x - 3$

$\frac{df(x)}{dx} = 6x + 8 = F(x)$

Esto significa que la integral indefinida , es una *integral definida con extremo superior variable*.

Gráficamente:



Finalmente, a partir de lo anterior, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x F(x)\,dx = F(x)$$

y

$$\int \underbrace{\frac{d}{dx}F(x)\ dx}_{dF(x)} = F(x)+C$$

pero por definición de diferencial: $dF(x)=\frac{d}{dx}F(x)dx$

$$\therefore \quad \int dF(x) = F(x)+C$$

El teorema fundamental del cálculo establece que la diferenciación y la integración son operaciones inversas.

Los símbolos $\int$ y d son operadores inversos.

IV.9 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL

Si $y=f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$; m es el mínimo absoluto que ocurre en x_m; M es el máximo absoluto que ocurre en x_M. Es decir:

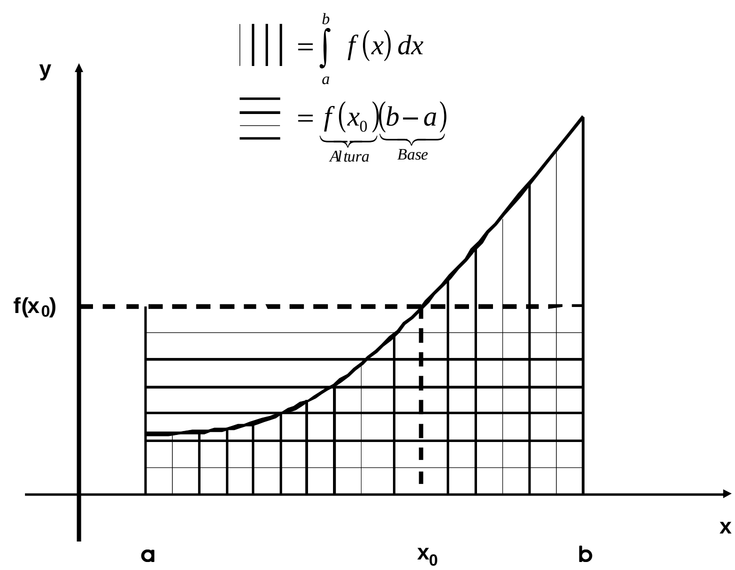
$$\begin{array}{ll} f(x_m)=m & a\le x_m \le b \\ f(x_M)=M & a\le x_M \le b \\ m\le f(x)\le M & \forall\ x \in [a,b] \end{array}$$

$\therefore$ existe un número $x_0 \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a) \qquad\qquad a \le x_0 \le b, \quad m \le f(x_0) \le M$$

La igualdad $\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$ se interpreta que, en toda función continua, el área bajo la curva siempre podrá ser igual al área de un rectángulo que tenga como base la amplitud del intervalo de definición de la función y como altura el valor de la función en algún punto del intervalo.

Gráficamente esto es:



Ejemplo.

Obtener x_0 de la función $y = 3x^2$ en el intervalo $1 \le x \le 2$.

Solución.

$$\int_1^2 3x^2\,dx = x^3\Big|_{x=1}^{x=2} = 8-1 = 7$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral:

$$7 = f(x_0)(2-1) \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = \frac{7}{2-1} = 7$$

despejando x de la función: $x = \sqrt{\frac{y}{3}} \quad \therefore \quad x_0 = \sqrt{\frac{7}{3}} \cong 1.5275$.

IV.10 INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean dos funciones u y v derivables de x, y considerando la regla para obtener la diferencial de un producto:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$$
$$\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$$
$$\Rightarrow \quad \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

El integrando se separa en dos partes. Una de ellas se iguala a u y la otra a dv (por eso se llama método de integración por partes). Se deben considerar dos aspectos:

1) La parte que se iguala a dv debe ser fácilmente integrable.
2) $\int v \cdot du$ no debe ser más complicada que $\int u \cdot dv$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes:

1) $\int x e^x \, dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = x, \quad dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$
$$\therefore \quad \int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

2) $\int x \, sen \, x \, dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad dv = sen \, x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$
$$\therefore \quad \int x \, sen \, x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + sen \, x + C$$

3) $\int x \sqrt{1+x} \, dx$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad dv = \sqrt{1+x} \, dx = (1+x)^{\frac{1}{2}} \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$
$$\therefore \quad \int x \sqrt{1+x} \, dx = x \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{2x}{3}\sqrt{(1+x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(1+x)^5} + C$$

4) $\int sen^2 \, x \, dx$

$$\int sen^2 \, x \, dx = \int sen \, x \, sen \, x \, dx$$
$$u = sen \, x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x \, dx, \quad dv = sen \, x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$
$$\therefore \quad \int sen \, x \, sen \, x \, dx = sen \, x(-\cos x) - \int (-\cos x)(\cos x) dx = -sen \, x \cos x + \int \cos^2 \, x \, dx$$

pero se sabe que: $sen^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \therefore \quad \cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$$= -sen \, x \cos x + \int \left(1 - sen^2 \, x\right) dx = -sen \, x \cos x + \int dx - \int sen^2 x \, dx$$

pero la última integral es igual que la buscada, pero con signo contrario, por lo tanto:

$$2\int sen^2 \, x \, dx = -\, sen \, x \cos x + x + C \quad \Rightarrow \quad \int sen^2 x \, dx = \frac{x - sen \, x \cos x}{2} + C$$

5) $\int x^3 \, e^{2x} \, dx$

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \quad du = 3x^2 \, dx, \quad dv = e^{2x} \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \int x^3 e^{2x}\,dx = x^3\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,3x^2\,dx = \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\underbrace{\int x^2 e^{2x}\,dx}_{\text{integral por partes}}$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx, \quad dv = e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \int x^2 e^{2x}\,dx = x^2\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,2x\,dx = \frac{x^2e^{2x}}{2} - \underbrace{\int x\,e^{2x}\,dx}_{\text{integral por partes}}$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx, \quad dv = e^{2x}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad \int x\,e^{2x}\,dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\therefore \quad \int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\left[\frac{x^2e^{2x}}{2} - \left(\frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\right] + C$$

$$= \frac{x^3e^{2x}}{2} - \frac{3x^2e^{2x}}{4} + \frac{3x\,e^{2x}}{4} - \frac{3\,e^{2x}}{8} + C$$

IV.11 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades más usadas en la resolución de integrales trigonométricas son:

1) $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

3) $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

4) $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

5) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

6) $sen\,x\cos x = \frac{1}{2}(sen\,2x)$

7) $2\,sen^2\frac{1}{2}x = 1 - \cos x$

8) $2\cos^2\frac{1}{2}x = 1 + \cos x$

9) $sen\,x\cos y = \frac{1}{2}[sen(x-y) + sen(x+y)]$

10) $sen\,x\,sen\,y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

11) $\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

Ejemplos.
Calcular las siguientes integrales utilizando identidades trigonométricas:

1) $\int sen^2 x\,dx$

$$\int sen^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen\,2x + C$$

2) $\int \cos^2 3x\,dx$

$$\int \cos^2 3x\,dx = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}\cos 6x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sen\,6x + C$$

3) $\int \cos^5 x\,dx$

$$\int \cos^4 x \cos x\,dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 \cos x\,dx = \int \left(1 - sen^2 x\right)^2 \cos x\,dx$$

$$= \int \left(1 - 2\,sen^2 x + sen^4 x\right)\cos x\,dx = \int \cos x\,dx - 2\int sen^2 x \cos x\,dx + \int sen^4 x \cos x\,dx$$

$$= sen\,x - 2\int u^2\,du + \int u^4\,du = sen\,x - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = sen\,x - \frac{2}{3}sen^3 x + \frac{1}{5}sen^5 x + C$$

4) $\int sen^2 x \cos^3 x\,dx$

$$\int sen^2 x \cos^3 x\,dx = \int sen^2 x\left(1 - sen^2 x\right)\cos x\,dx = \int \left(sen^2 x - sen^4 x\right)\cos x\,dx$$

$$= \int sen^2 x \cos x\,dx - \int sen^4 x \cos x\,dx = \frac{1}{3}sen^3 x - \frac{1}{5}sen^5 x + C$$

5) $\int \sec^4 2x\,dx$

$$\int \sec^4 2x\,dx = \int \sec^2 2x \sec^2 2x\,dx + \int \left(1 + \tan^2 2x\right)\sec^2 2x\,dx$$

$$= \int \sec^2 2x dx + \int \tan^2 2x \sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{6}\tan^3 2x + C$$

6) $\int sen\,2x \cos 4x\,dx$

$$\int sen\,2x \cos 4x\,dx = \frac{1}{2}\int \left[sen\left(2x - 4x\right) + sen\left(2x + 4x\right)\right]dx = \frac{1}{2}\int sen\left(-2x\right)dx + \frac{1}{2}\int sen\,6x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\cos\left(-2x\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\left(-\cos 6x\right) + C = \frac{1}{4}\cos\left(-2x\right) - \frac{1}{12}\cos 6x + C$$

7) $\int sen\,5x\,sen\,x\,dx$

$$\int sen\,5x\,sen\,4x\,dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos\left(5x - x\right) - \cos\left(5x + x\right)\right]dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 6x dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)sen\,4x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\left(sen\,6x\right) + C = \frac{1}{8}sen\,4x - \frac{1}{12}sen\,6x + C$$

8) $\int \cos 3x \cos 2x\,dx$

$$\int \cos 3x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos\left(3x - 2x\right) + \cos\left(3x + 2x\right)\right]dx = \frac{1}{2}\int \cos x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 5x dx$$

$$= \frac{1}{2}sen\,x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)sen\,5x + C = \frac{1}{2}sen\,x + \frac{1}{10}sen\,5x + C$$

IV.12 MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Si P y Q son dos funciones polinómicas, teóricamente siempre es posible resolver integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$ se dice que es una *fracción propia*, en caso contrario es una *fracción impropia*.

En la práctica, la obtención de dichas integrales depende de que sea posible factorizar el denominador $Q(x)$.

Por la naturaleza de los factores del denominador, se consideran cuatro casos:

Caso 1: *Factores lineales distintos*

A cada factor lineal $ax+b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{A}{ax+b}$ siendo A una constante a determinar.

Ejemplos

1) Hallar: $\int \frac{dx}{x^2-4}$

$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$, multiplicando por x^2-4 se tiene: $1=A(x-2)+B(x+2)$

Si $x=2 \quad \Rightarrow \quad 1=A(2-2)+(2+2)B \quad \Rightarrow \quad 4B=1 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{1}{4}$

Si $x=-2 \quad \Rightarrow \quad 1=(-2-2)A+B(-2+2) \quad \Rightarrow \quad -4A=1 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2-4}=\int \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}dx+\int \frac{\frac{1}{4}}{x-2}dx=-\frac{1}{4}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\ln|x-2|+C$$

2) Hallar: $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$

$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x}=\frac{x+1}{x(x^2+x-6)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$, multiplicando por x^3+x^2-6x se tiene:

$x+1=A(x+3)(x-2)+B\,x(x-2)+C\,x(x+3)$

Si $x=0$: $\quad 0+1=A(0+3)(0-2)+0B+0C \quad \Rightarrow \quad -6A=1 \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{6}$

Si $x=-3$: $\quad -3+1=0A+B(-3)(-3-2)+0C \quad \Rightarrow \quad 15B=-2 \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{2}{15}$

Si $x=2$: $\quad 2+1=0A+0B+C(2)(2+3) \quad \Rightarrow \quad 10C=3 \quad \Rightarrow \quad C=\frac{3}{10}$

$$\therefore \quad \int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x} = \int \frac{-\frac{1}{6}}{x}dx + \int \frac{-\frac{2}{15}}{x+3}dx + \int \frac{\frac{3}{10}}{x-2}dx = -\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + \frac{3}{10}\ln|x-2| + C$$

<u>Caso 2</u>: *Factores lineales iguales*

A cada factor cuadrático de la forma $(ax+b)^n$, donde $n \geq 1$, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma $\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \cdots$ siendo $A, B, C, \cdots$ constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener: $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2}$

$$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{x}{(x-2)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

multiplicando por $(x-2)^2$ se tiene: $x = A(x-2) + B$

Si $x = 2$: $\quad 2 = 0 + B \quad \Rightarrow \quad B = 2$

Si $x = 0$: $\quad 0 = A(-2) + 2 \quad \Rightarrow \quad 2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$$\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2} = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{2\,dx}{(x-2)^2}$$

ahora, haciendo el cambio de variable para la última integral:

$$u = x-2 \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2\,dx}{(x-2)^2} = 2\int u^{-2}\,du$$

finalmente:

$$\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2} = \ln|x-2| + \frac{2u^{-1}}{-1} + C = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

2) Obtener: $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x+5}{(x+1)(x^2-2x+1)} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

multiplicando por x^3-x^2-x+1 se tiene: $3x+5 = A(x-1)(x-1) + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$

Si $x = -1$: $\quad 3(-1)+5 = A(-1-1)(-1-1) + 0B + 0C \quad \Rightarrow \quad 4A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Si $x = 1$: $\quad 3(1)+5 = 0+0+C(1+1) \quad \Rightarrow \quad 2C = 8 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{8}{2} = 4$

Si $x = 0$: $\quad 3(0)+5 = \frac{1}{2}(0-1)^2 + B(0+1)(0-1) + 4(0+1)$

$$\Rightarrow \quad 5=\frac{1}{2}-B+4 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{1}{2}+4-5 \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{2}$$

$\therefore \quad \int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}=\int \frac{\frac{1}{2}dx}{x+1}+\int \frac{-\frac{1}{2}dx}{x-1}+\int \frac{4\,dx}{(x-1)^2}$. Ahora, haciendo el cambio de variable para la última integral: $u=x-1 \quad \Rightarrow \quad du=dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{4\,dx}{(x-1)^2}=\int u^{-2}\,du$

finalmente:

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{4u^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$$

Caso 3: *Factores cuadráticos distintos*

A cada factor cuadrático irreducible ax^2+bx+c, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ siendo A, B las constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}=\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$, multiplicando por x^4+3x^2+2 se tiene:

$$x^3+x^2+x+2=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)$$
$$x^3+x^2+x+2=Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^3+Dx^2+2Cx+2D$$
$$x^3+x^2+x+2=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+2C)x+B+2D$$

Comparando:

$A+C=1 \quad \_(1)$

$B+D=1 \quad \_(2)$

$A+2C=1 \quad \_(3)$

$B+2D=2 \quad \_(4)$

de (1): $A=1-C$

sustituyendo en (3): $1-C+2C=1 \quad \Rightarrow \quad C=0$

$\therefore \quad A=1-0=1$

de (2): $B=1-D$,

sustituyendo en (4): $1-D+2D=2 \quad \Rightarrow \quad D=1$,

$\therefore \quad B=1-1=0$

$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx=\int \frac{1x+0}{x^2+2}dx+\int \frac{0x+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x\,dx}{x^2+2}+\int \frac{dx}{x^2+1}$, Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera integral: $u=x^2+2 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

finalmente:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx=\frac{1}{2}\ln|u|+\tan^{-1}x+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right|+\tan^{-1}x+C$$

2) Obtener $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx$

$\frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}=\frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$, multiplicando por x^4+4x^2+3 se tiene:

$x^3+x^2+x+3=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)$

$x^3+x^2+x+3=Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx^3+Dx^2+3Cx+3D$

$x^3+x^2+x+3=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+B+3D$

Comparando:

$A+C=1 \quad \_(1)$

$B+D=1 \quad \_(2)$

$A+3C=1 \quad \_(3)$

$B+3D=3 \quad \_(4)$

de (1): $A=1-C$

sustituyendo en (3): $1-C+3C=1 \quad \Rightarrow \quad C=0$

$\therefore \quad A=1-0=1$

de (2): $B=1-D$,

sustituyendo en (4): $1-D+3D=3 \quad \Rightarrow \quad D=1$,

$\therefore \quad B=1-1=0$

$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx=\int \frac{1x+0}{x^2+3}dx+\int \frac{0x+1}{x^2+1}dx=\int \frac{x\,dx}{x^2+3}+\int \frac{dx}{x^2+1}$, Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera integral: $u=x^2+3 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

finalmente:

$$\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+4x^2+3}dx=\frac{1}{2}\ln|u|+\tan^{-1}x+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3\right|+\tan^{-1}x+C$$

Caso 4: *Factores cuadráticos iguales*

A cada factor cuadrático irreducible $(ax^2+bx+c)^n$, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n factores de la forma:

$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)^3}+\cdots$ siendo $A, B, C, D, \cdots$ constantes a determinar.

Ejemplos.

1) Obtener: $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx$

$\frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}$ multiplicando por $(x^2+4)^2$ se tiene:

$2x^3+x^2+4=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)$

$2x^3+x^2+4=Ax^3+Bx^2+4Ax+4B+Cx+D=Ax^3+Bx^2+(4A+C)x+(4B+D)$

Comparando:

$A=2 \qquad \_(1)$

$B=1 \qquad \_(2)$

$4A+C=0 \qquad \_(3)$

$4B+D=4 \qquad \_(4)$

de (1): $A=2$

sustituyendo en (3): $4(2)+C=0 \quad \Rightarrow \quad C=-8$

de (2): $B=1$,

sustituyendo en (4): $4(1)+D=4 \quad \Rightarrow \quad D=0$,

$$\int\frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+4}dx+\int\frac{-8x+0}{(x^2+4)^2}dx$$

$$\int\frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx=\int\frac{2x}{x^2+4}dx+\int\frac{dx}{x^2+4}-\int\frac{8x}{(x^2+4)^2}\ dx$$

Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera y última integral:

$u=x^2+4 \quad \Rightarrow \quad du=2x\,dx$ se tiene:

$$=\frac{2}{2}\int\frac{du}{u}dx-\int\frac{dx}{x^2+4}+\frac{8}{2}\int\frac{du}{u^2}$$

finalmente:

$$\int\frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx=\ln|u|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-4u^{-1}+C$$

$$=\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-\frac{4}{x^2+4}+C$$

2) Obtener: $\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}dx$

$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$ multiplicando por $(x^2+2)^3$ se tiene:

$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)(x^2+2)^2+(Cx+D)(x^2+2)+(Ex+F)$

$x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4=(Ax+B)(x^4+4x^2+4)+(Cx+D)(x^2+2)+Ex+F$

$=Ax^5+Bx^4+4Ax^3+4Bx^2+4Ax+4B+Cx^3+Dx^2+2Cx+2D+Ex+F$

$=Ax^5+Bx^4+(4A+C)x^3+(4B+D)x^2+(4A+2C+E)x+4B+2D+F$

Comparando:

$A = 1 \qquad \_(1)$
$B = -1 \qquad \_(2)$
$4A + C = 4 \qquad \_(3)$
$4B + D = -4 \qquad \_(4)$
$4A + 2C + E = 8 \qquad \_(5)$
$4B + 2D + F = -4 \qquad \_(6)$

de (1): $A = 1$

sustituyendo en (3): $4(1) + C = 4 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

de (2): $B = -1$,

sustituyendo en (4): $4(-1) + D = -4 \quad \Rightarrow \quad D = 0$,

de (5): $E = 8 - 4(1) - 2(0) = 4$,

de (6): $F = -4 - 4(-1) - 2(0) = 0$,

$$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\,dx = \int \frac{1x - 1}{x^2+2}\,dx + \int \frac{0x + 0}{(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{4x + 0}{(x^2+2)^3}\,dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2+2}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+2} + \int \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$$

Ahora, haciendo el cambio de variable para la primera y última integral:

$u = x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$ se tiene:

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+2} + \frac{4}{2}\int \frac{du}{u^3}$$

finalmente:

$$\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|u| - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} - u^{-2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

Ejemplo.
Resolver la siguiente integral racional impropia:

$$\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}\,dx$$

efectuando la división se tiene:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^3 - x^2 & x^4 - x^3 - x - 1 \\ & -x^4 + x^3 \\ \cline{2-2} & \qquad\quad -x - 1 \end{array}$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2}\,dx = \int \left[x + \frac{(-x-1)}{x^3 - x^2} \right] dx$$

$\dfrac{-x-1}{x^3 - x^2} = \dfrac{-x-1}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1}$, multiplicando por $x^3 - x^2$ se tiene:

$-x-1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$

Si $x=1 \quad \Rightarrow \quad -1-1=0A+0B+C(1)^2 \quad \Rightarrow \quad C=-2$

Si $x=0 \quad \Rightarrow \quad -0-1=0A+B(0-1)+0C \quad \Rightarrow \quad -B=-1 \quad \Rightarrow \quad B=1$

Si $x=2 \quad \Rightarrow \quad -2-1=A(2)(2-1)+1(2-1)+(-2)(2)^2 \quad \Rightarrow \quad -3=2A+1-8 \quad \Rightarrow \quad A=2$

$$\therefore \quad \int\left[x+\frac{(-x-1)}{x^3-x^2}\right]dx=\int x\,dx+\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{-2}{x-1}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+C$$

IV.13 INTEGRALES IMPROPIAS

Una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se denomina *impropia* si:

a) El integrando $f(x)$, tiene uno o más puntos de discontinuidad en el intervalo $a\le x\le b$

b) Por lo menos uno de los límites de integración es infinito.

a) *Integrando discontinuo*

i) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a\le x<b$ pero es discontinua en $x=b$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx$; es discontinua en $x=3$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0} sen^{-1}\frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[sen^{-1}\frac{3-\varepsilon}{3}-sen^{-1}\frac{0}{3}\right]=sen^{-1}\frac{3}{3}-sen^{-1}0=sen^{-1}1-0=\frac{\pi}{2}$$

ii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a<x\le b$ pero es discontinua en $x=a$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$; es discontinua en $x=2$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{2+\varepsilon}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_{2+\varepsilon}^{5} = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left[2\sqrt{5-2} - 2\sqrt{2+\varepsilon-2}\right] = 2\sqrt{3} - 0 = 2\sqrt{3}$$

iii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a \le x \le b$ pero es discontinua en $x=c$, donde $a<c<b$, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplos.

1) Calcular: $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$; presenta discontinuidad en $x=2$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 3\sqrt[3]{x-2}\Big|_0^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} 3\sqrt[3]{x-2}\Big|_{2+\varepsilon}^{4}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(3\sqrt[3]{2-\varepsilon-2} - 3\sqrt[3]{0-2}\right) + \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(3\sqrt[3]{4-2} - 3\sqrt[3]{2+\varepsilon-2}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(3\sqrt[3]{\varepsilon} - 3\sqrt[3]{-2}\right) + \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{\varepsilon}\right) = -3\sqrt[3]{-2} + 3\sqrt[3]{2} = 2\left(3\sqrt[3]{2}\right) = 6\sqrt[3]{2}$$

2) Calcular: $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$; presenta discontinuidad en $x=0$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{8} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_{0+\varepsilon}^{8}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(0-\varepsilon)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(-1)^2}\right) + \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(0+\varepsilon)^2}\right) = 0 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(4) + 0 = \frac{9}{2} = 4.5$$

b) *Límites de integración infinitos*

i) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $a \le x \le k$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k \to +\infty} \int_a^k f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{k\to\infty}\int_0^{k} \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\bigg|_0^k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{0}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\infty}{2}-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{0}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}(0)=\frac{\pi}{4}$$

ii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $j \le x \le b$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{j\to-\infty}\int_j^b f(x)dx$$

siempre que exista el límite.

Ejemplo.

Calcular: $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{j\to-\infty}\int_j^0 e^{2x}\,dx = \lim_{j\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2x}\bigg|_j^0 = \lim_{j\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2(0)}-\frac{1}{2}e^{2j}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{0}-\frac{1}{2}e^{-\infty}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

iii) Si $f(x)$ es continuo en el intervalo $j \le x \le k$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx + \lim_{j\to-\infty}\int_j^a f(x)dx$$

siempre que <u>ambos</u> limites existan.

Ejemplo.

Calcular: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2}$

Utilizando el cero como referencia, es decir, integrando de 0 a ∞ y de $-\infty$ a 0, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{k\to\infty}\int_0^k \frac{dx}{1+4x^2} + \lim_{j\to-\infty}\int_j^0 \frac{dx}{1+4x^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}2x\bigg|_0^k + \lim_{j\to-\infty}\frac{1}{2}\tan^{-1}2x\bigg|_j^0$$

$$=\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0\right)+\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}0-\tan^{-1}(-\infty)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{1}{2}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

IV.14 APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Existen muchos campos del conocimiento en que existen aplicaciones de la integral. Por la naturaleza de este concepto, puede aplicarse tanto en Geometría, en Física, en Economía e incluso en Biología.

Por sólo citar algunos ejemplos, a continuación se mencionan las aplicaciones más conocidas de la integral:

1. Hallar el *área de regiones planas*.
2. Obtener los *volúmenes de sólidos de revolución*.
3. Calcular *volúmenes de sólidos* con secciones conocidas.
4. Determinar la *longitud de arco de una curva*.
5. Examinar el *comportamiento aleatorio* de variables continuas (función de densidad probabilidad).
6. Conocer el *valor promedio de una función*.
7. Hallar *momentos* (fuerzas que ejercen ciertas masa con respecto a un punto) y *centros de masa* o *centroide* (el punto en que un objeto se equilibra horizontalmente).
8. Encontrar la *presión ejercida por un fluido*.
9. Calcular el *trabajo realizado* de mover un objeto de un punto a otro.
10. Obtener *velocidades y aceleraciones* de móviles.
11. Conocer el *superávit del consumidor* (cantidad de dinero ahorrado por los consumidores, al comprar un artículo a un precio dado).
12. Determinar el *flujo sanguíneo* (volumen de sangre que pasa por una sección transversal por unidad de tiempo) de una persona y su *gasto cardiaco* (volumen de sangre bombeado por el corazón por unidad de tiempo.

A continuación se profundiza en las primeras dos aplicaciones enlistadas.

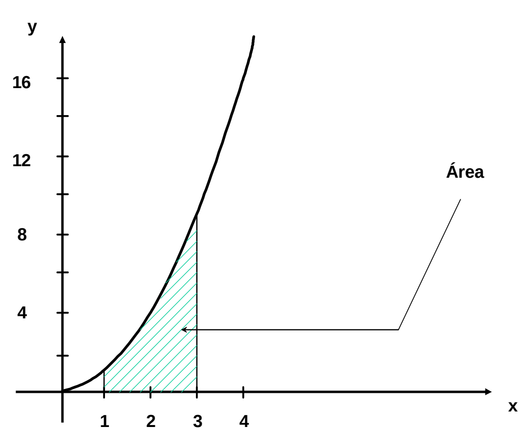
IV.14.1 CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

Para calcular una área plana, se efectúa la siguiente metodología:

1. Se trazan las curvas que limitan el área que se desea conocer.
2. Se identifican los puntos en los que se cortan las curvas.
3. Se determina la zona de la que hay que calcular el área.
4. Se decide que variable conviene integrar
5. Se procede a integrar bajo los límites encontrados.

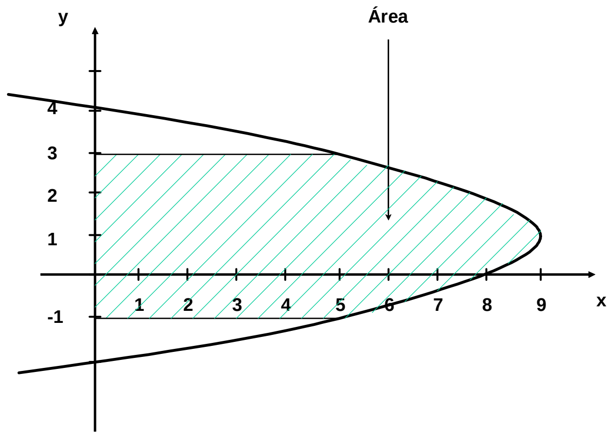
Ejemplos.
Hallar el área limitada por las siguientes condiciones:

1) Curva $y = x^2$, el eje x y por las rectas $x = 1$ y $x = 3$
Solución:



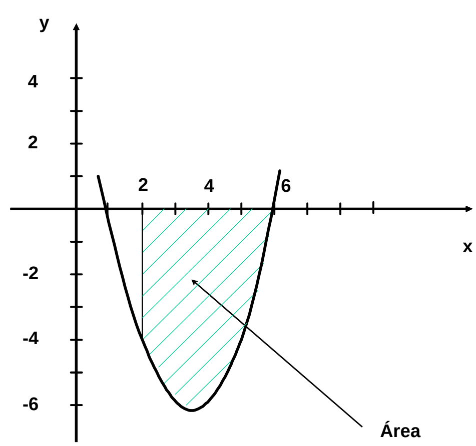
$$A=\int_{1}^{3} x^{2}\,dx=\left.\frac{x^{3}}{3}\right|_{1}^{3}=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}\approx 8.66\,u^{2}$$

2) El eje y, la curva $x=8+2y-y^{2}$ y por las rectas $y=-1$ y $y=3$
Solución:



$$A=\int_{-1}^{3}\left(8+2y-y^{2}\right)dy=\left.\left(8y+y^{2}-\frac{y^{3}}{3}\right)\right|_{-1}^{3}=\left(24+9-9\right)-\left(-8+1+\frac{1}{3}\right)$$
$$=24-\left(-\frac{20}{3}\right)=\frac{92}{3}\approx 30.66\,u^{2}$$

3) Curva $y=x^{2}-7x+6$, el eje x y por las rectas $x=2$ y $x=6$
Solución:



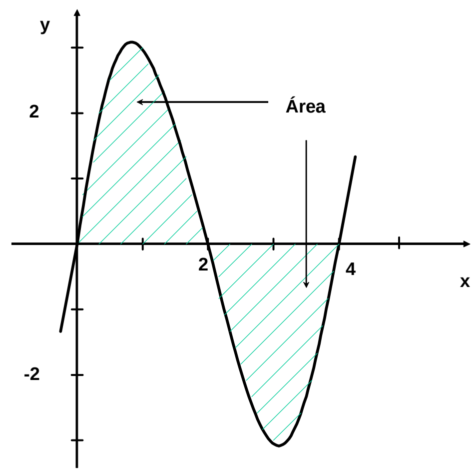
Por situarse debajo del eje de integración (x), debe afectarse todo por un signo negativo.

$$A=\int_2^6 -\left(x^2-7x+6\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+6x\right)\Bigg|_2^6=-\left[\left(\frac{216}{3}-\frac{7}{2}(36)+36\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{7}{2}(4)+12\right)\right]$$

$$=-\left[(72-126+36)-\left(\frac{8}{3}-14+12\right)\right]=-\left[(-18)-\left(\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{56}{3}\approx 18.66\,u^2$$

4) Curva $y=x^3-6x^2+8x$ y el eje x

Solución:



La curva corta al eje x en $0, 2$ y 4

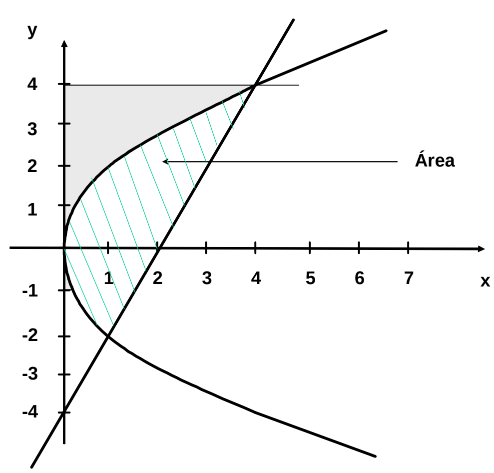
$$\therefore \quad A=\int_0^2\left(x^3-6x^2+8x\right)dx-\int_2^4\left(x^3-6x^2+8x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_0^2-\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right)\Bigg|_2^4=\left[(4-16+16)-(0)\right]-\left[(64-128+64)-(4-16+16)\right]$$

$$=4+4=8\,u^2$$

5) Hallar el área comprendida entre la parábola $y^2=4x$ y la recta $y=2x-4$

Solución:



Despejando x de la ecuación de la recta: $x=\frac{y+4}{2}$ y sustituyendo en la ecuación de la parábola:

$$y^2=4\left(\frac{y+4}{2}\right)=2(y+4)=2y+8$$

$y^2-2y-8=0$, resolviendo la ecuación: $(y+2)(y-4)=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=-2, \quad y_2=4$

$$\therefore \quad x_1=\frac{-2+4}{2}=1, \quad x_2=\frac{4+4}{2}=4 \quad \therefore \quad P_1(1,-2), \quad P_2(4,4)$$

Área pedida = Área bajo la recta - Área bajo la parábola:

$$A=\int_{-2}^{4}\frac{y+4}{2}dy-\int_{-2}^{4}\frac{y^2}{4}dy=\int_{2}^{4}\left(\frac{y}{2}+2\right)dy-\int_{-2}^{4}\frac{y^2}{4}dy=\left(\frac{y^2}{4}+2y\right)\Bigg|_{-2}^{4}-\left(\frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{4}$$

$$=[(4+8)-(1-4)]-\left[\frac{64}{12}-\left(-\frac{8}{12}\right)\right]=[12-(-3)]-\left[\frac{72}{12}\right]=15-6=9\,u^2$$

6) Hallar el área comprendida entre las parábolas $y=6x-x^2$ y $y=x^2-2x$

Solución:

Igualando las ecuaciones para obtener los puntos de intersección:

$$6x-x^2=x^2-2x \quad \Rightarrow \quad -2x^2+8x=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2-8x=0$$

factorizando:

$$x(2x-8)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$$

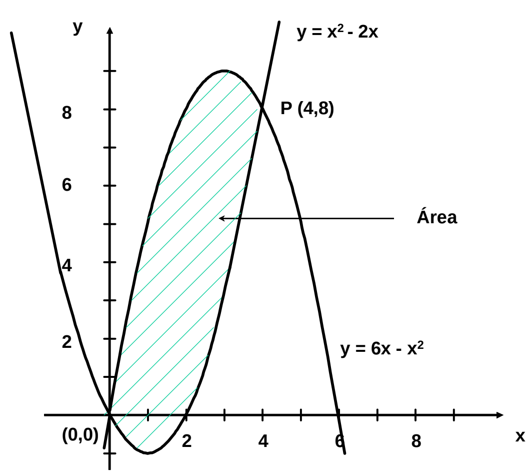
$$2x-8=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{8}{2}=4$$

$$y_1=6(0)-0^2=0-0=0$$

$$y_2=6(4)-4^2=24-16=8$$

$\therefore$ los puntos de intersección son: $P_1(0,0), \quad P_2(4,8)$

Área pedida = Área bajo la parábola 1 - Área bajo la parábola 2:



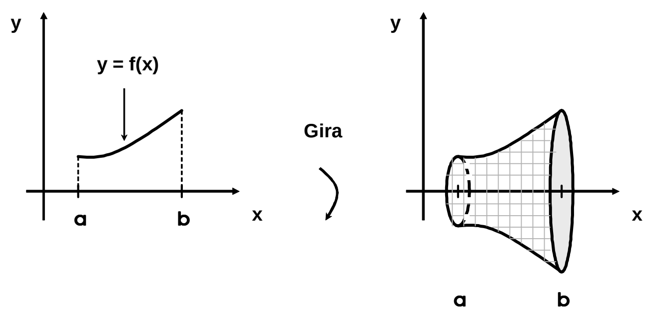
$$A=\int_0^4\left(6x-x^2\right)dx-\int_0^4\left(x^2-2x\right)dx=\left(3x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_0^4$$

$$=\left[\left(3(16)-\frac{64}{3}\right)-(0-0)\right]-\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-(0-0)\right]=48-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}+16=\frac{64}{3}\approx 21.66\,u^2$$

IV.14.2 VOLÚMENES SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Si una función se gira con respecto a un eje del plano se genera un volumen conocido como *sólido de revolución* y al eje se le llama *eje de revolución*.

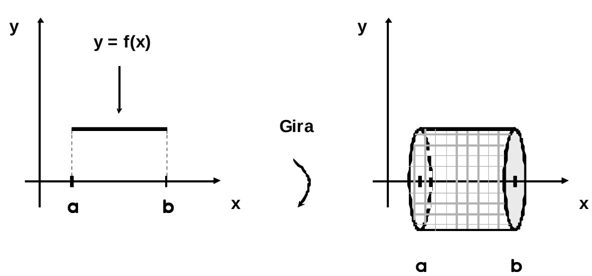
Gráficamente, esto es:



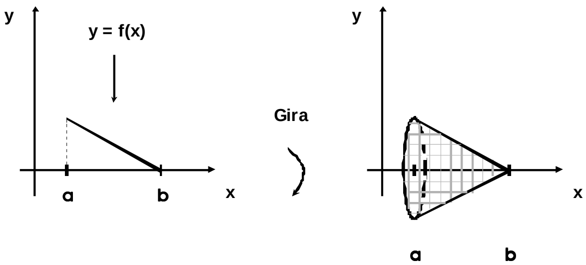
Función **Sólido de revolución**

En general, una función puede girarse libremente, por lo que la forma del sólido que se genera depende, tanto de la naturaleza de la función, como del eje de revolución.

En las siguientes gráficas se aprecia como se forman sólidos de revolución conocidos, si se giran funciones muy elementales:

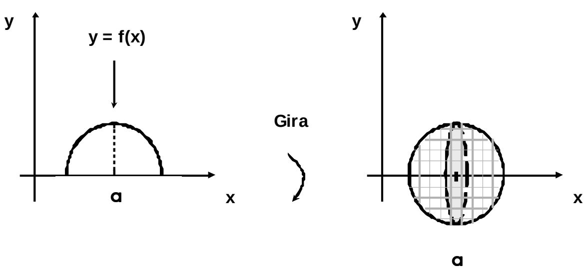


Constante **Cilindro**



Triángulo rectángulo

Cono



Semicircunferencia

Esfera

Un volumen del sólido de revolución se conforma de la suma infinita de franjas unitarias de volumen y si se genera haciendo girar a una función $f(x)$ alrededor del eje x, se puede calcular por medio de:

$$V=\int_a^b \pi\cdot[f(x)]^2\,dx$$

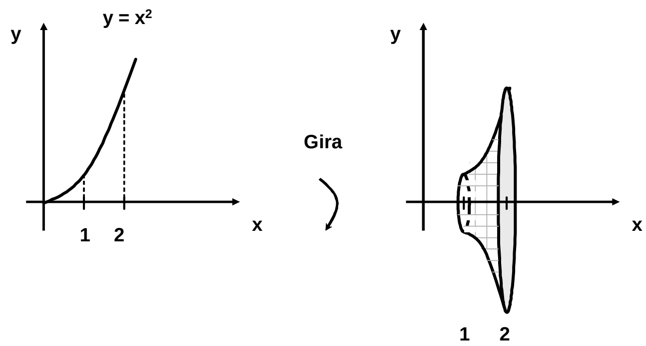
donde a y b representan las rectas que lo limitan, es decir, son los extremos.

Ejemplos.
Calcular el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar las siguientes funciones con los límites marcados y el eje de revolución dado.

1) $y=x^2$, el eje x y las rectas $x=1$ y $x=2$

Solución:

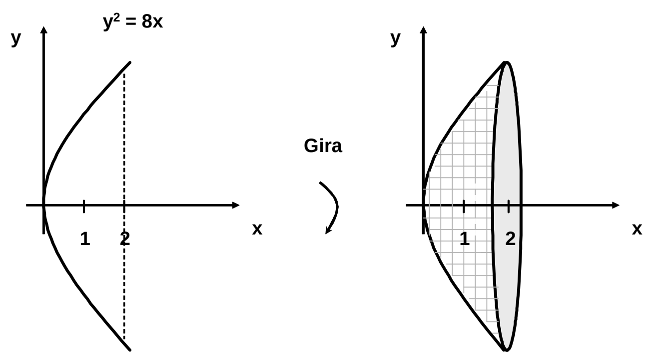
$$V=\int_1^2 \pi\left[x^2\right]^2 dx=\int_1^2 \pi x^4\,dx=\left.\frac{\pi x^5}{5}\right|_1^2=\frac{32\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\frac{31\pi}{5}\approx 19.47\ u^3$$



2) $y^2 = 8x$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 2$

Solución:

$$V = \int_0^2 \pi \left[\sqrt{8x}\right]^2 dx = \int_0^2 \pi\, 8x\, dx = \pi 4x^2 \Big|_0^2 = 16\pi - 0 = 16\pi \approx 50.26\, u^3$$



3) $y = 4x^2$, el eje y y las rectas $y = 0$ y $y = 16$

Solución:

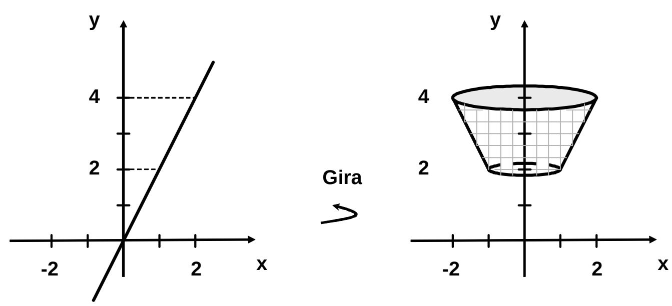
$$V = \int_0^{16} \pi \left[\sqrt{\frac{y}{4}}\right]^2 dy = \int_0^{16} \frac{\pi\, y}{4}\, dy = \frac{\pi\, y^2}{8}\Big|_0^{16} = \frac{256\pi}{8} - 0 = 32\pi \approx 100.53\, u^3$$

y = 4x²

4) $y = 2x$, el eje y y las rectas $y = 2$ y $y = 4$

Solución:

$$V = \int_2^4 \pi \left[\frac{y}{2} \right]^2 dy = \int_2^4 \frac{\pi y^2}{4} dy = \frac{\pi y^3}{12} \bigg|_2^4 = \frac{64\pi}{12} - \frac{8\pi}{12} = \frac{56\pi}{12} \approx 14.66\, u^3$$



y = 2x

IV.15 ECUACIONES DIFERENCIALES SENCILLAS

IV.15.1 ORDEN, GRADO Y SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una ecuación que contiene derivadas o diferenciales se llama *ecuación diferencial*.

Ejemplos.

1) $3x\dfrac{dy}{dx} + 8y = 7$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2e^x \frac{dy}{dx} + y\frac{dy}{dx} = x^3$

3) $F = m \cdot \frac{d^2x}{dx^2}$ (segunda ley de Newton)

El *orden* de una ecuación diferencial es igual al de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación.

Ejemplos.

1) $\frac{dy}{dx} + 3\frac{d^2y}{dx} + 4y = 0$ (ecuación diferencial de segundo orden)

2) $x\frac{d^3y}{dx^3} - 8xy\frac{d^4y}{dx^4} - 5x = 0$ (ecuación diferencial de cuarto orden)

El *grado* de una ecuación diferencial es el exponente mayor de la derivada de mayor orden de la ecuación.

Ejemplos.

1) $\frac{d^2y}{dx^2} + (2xy)^5 + \left(7\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 9x = 0$ (ecuación diferencial de tercer orden y segundo grado)

2) $4\frac{d^3y}{dx^3} - 8x - 9y\frac{d^5y}{dx^5} - 11\left(\frac{dy}{dx}\right)^8 - 12 = 0$ (ecuación diferencial de quinto orden y primer grado)

3) $6\frac{d^2y}{dx^2} - 14xy - 8\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3 - 15\frac{dy}{dx} = 0$ (ecuación diferencial de cuarto orden y tercer grado)

Una solución de una ecuación diferencial es aquella que satisface a la ecuación, por ejemplo, si se tiene:
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$, una solución es: $y = 8e^x + 3e^{-4x}$, esto es:

$$\frac{dy}{dx} = 8e^x - 12e^{-4x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8e^x + 48e^{-4x}$$

sustituyendo en la ecuación:

$$8e^x + 48e^{-4x} + 3\left(8e^x - 12e^{-4x}\right) - 4\left(8e^x + 3e^{-4x}\right)$$
$$= 8e^x + 48e^{-4x} + 24e^x - 36e^{-4x} - 32e^x - 12e^{-4x} = 0$$

IV.15.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES (DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN)

Dependiendo del tipo de ecuación diferencial, conviene aplicar un método de resolución particular. Por su sencillez, los más utilizados son el de la obtención de raíces del polinomio y el de separación de variables.

En el primer caso, suele utilizarse el operador D en lugar de la derivada, a fin de que cada raíz a_i del polinomio formado, tenga la forma $C_i\, e^{a_i x}$, donde C_i son constantes. Por su parte, la separación de variables, se efectúa a fin de facilitar su integración.

Ejemplos.
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $5\dfrac{dy}{dx}+8y=0$

Solución:

$$(5D+8)y=0 \quad \Rightarrow \quad 5D=-8 \quad \Rightarrow \quad D=-\frac{8}{5}$$

$$\therefore \quad y=C_1\, e^{-\frac{8}{5}x}$$

comprobación: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{8}{5}C_1\, e^{-\frac{8}{5}x}$

sustituyendo: $5\left(-\dfrac{8}{5}C_1 e^{-\frac{8}{5}x}\right)+8\left(C_1 e^{\frac{-8}{5}x}\right)=-8C_1 e^{-\frac{8}{5}x}+8C_1 e^{-\frac{8}{5}x}=0$

2) $4\dfrac{dy}{dx}-11y=0$

Solución:

$$(4D-11)y=0 \quad \Rightarrow \quad 4D=11 \quad \Rightarrow \quad D=\frac{11}{4}$$

$$\therefore \quad y=C_1\, e^{\frac{11}{4}x}$$

comprobación: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{11}{4}C_1\, e^{\frac{11}{4}x}$

sustituyendo: $4\left(\dfrac{11}{4}C_1 e^{\frac{11}{4}x}\right)-11\left(C_1 e^{\frac{11}{4}x}\right)=11C_1 e^{\frac{11}{4}x}-11C_1 e^{\frac{11}{4}x}=0$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+11\dfrac{dy}{dx}+28y=0$

Solución:

$$(D^2+11D+28)y=0 \quad \Rightarrow \quad (D+4)(D+7)y=0 \quad \Rightarrow \quad D_1=-4, \quad D_2=-7$$

$$\therefore \quad y=C_1\, e^{-4x}+C_2\, e^{-7x}$$

4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}-24y=0$

Solución:

$$(D^2+2D-24)y=0 \quad \Rightarrow \quad (D+6)(D-4)y=0 \quad \Rightarrow \quad D_1=-6, \quad D_2=4$$

$$\therefore \quad y=C_1\, e^{-6x}+C_2\, e^{4x}$$

5) $8(y+4)dx-(x-2)dy=0$

Solución:

$8(y+4)dx=(x-2)dy$

si se separan las variables se tiene:

$\frac{8\,dx}{x-2}=\frac{dy}{y+4}$, integrando: $\int\frac{8\,dx}{x-2}=\int\frac{dy}{y+4}$

$8\ln|x+2|=\ln|y+4|$, elevando a la e:

$e^{8\ln|x+2|}=e^{\ln|y+4|}$

$e^{8\ln|x+2|}=|y+4|$

$\therefore\quad y=e^{8\ln|x+2|}-4$

6) $y\,dx+(x^2+1)dy=0$

Solución:

$y\,dx=-(x^2+1)dy$

separando las variables:

$\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{dy}{y}$, integrando: $\int\frac{dx}{x^2+1}=-\int\frac{dy}{y}$

$\tan^{-1}x=-\ln|y|$, elevando a la e:

$e^{\tan^{-1}x}=e^{-\ln|y|}$

$e^{\tan^{-1}x}=-y$

$\therefore\quad y=-e^{\tan^{-1}x}$