Cálculo Integral

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE SALTILLO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MATERIA:
CÁLCULO INTEGRAL

ING. IGNACIO DÁVILA RÍOS

SALTILLO, COAHUILA A ENERO DE 2018

Unidad I Teorema fundamental del cálculo

1.1 Medición aproximada de figuras amorfas

Desde el principio de la historia de las matemáticas las personas han mostrado sumo interés en el cálculo de las áreas de figuras, los pioeros en el tema empezaron por tratar de calcular áreas de figuras conocidas y que hasta la fecha seguimos haciendo uso de ellas. Tales figuras pueden ser las siguientes con sus respectivas fórmulas:

L

h

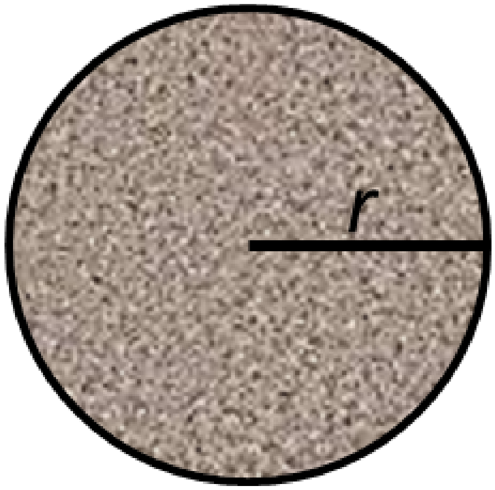
h

L b b

Cuadrado Rectángulo

Triángulo Circulo

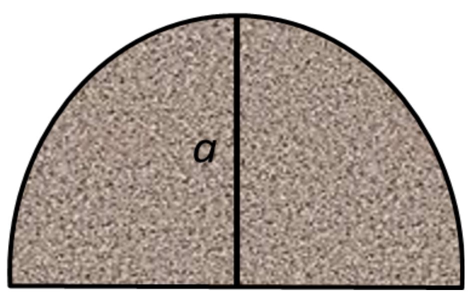
A = L × L A = b × h A = (b × h) / 2



$A = \pi r^2$

Fig. 1.1 Área de figuras bien definidas

Sin embargo, que sucedía con las figuras amórfas, es decir, aquellas figuras que no mostraban una trayectoria definida, como lo son las curvas, un caso muy conocido es el ejemplo del área de un segmento de parábola, como se muestra a continuación:



b

Segmento de parábola

$A = \frac{2}{3} a\, b$

Figura 1.2 Área de una parábola

La pregunta es, ¿cómo hicieron estas personas para llegar a calcular áreas tan complejas de figuras, como las amórfas?, la respuesta es simple y tiene que ver con el cálculo aproximado de áreas, la estrategía que se siguió fue mediante el uso de áreas conocidas y la sumatoria de estas ajustadas a las figuras amórfas. Por ejemplo, ¿cómo se llegó en un principio al área de una circunferencia?, alguien propuso trazar un figura conocida por dentro o por fuera de la circunferencia y así aproximar dicha área, como se muestra a continuación:

Figura 1.3 Área aproximada de una circunferencia

El problema fue evidente ya que si se trazaba la figura conocida (en este caso un cuadrado) por dentro, le estaría faltando demasiada área a la circunferencia y visceversa, si la figura se trazaba por fuera, pues le estaría sobrando la misma área a la circunferencia, por lo que se optó por seguir utilizando más área conocidas e ir sumándolas, tal como se muestra a continuación:

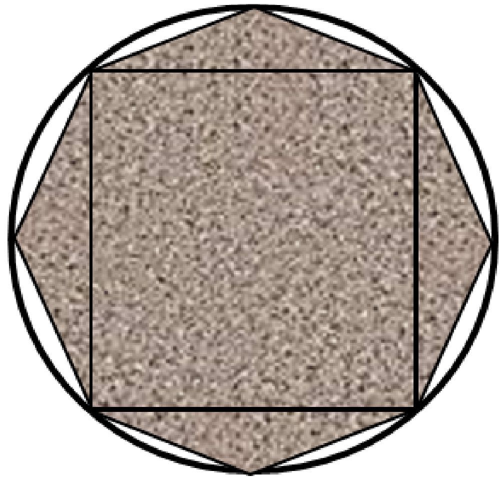


Figura 1.4 Área aproximada de la circunferencia mediante figuras definidas

En esta figura anterior se puede observar que se utilizó un cuadrado y cuatro triángulos de las cuales se cálcula su área y se suman para así aproximar el resultado del área de la circunferencia, así se siguió con los espacios pequeños que faltaban de área en la circunferencia y se seguian sumado para aproximarse cada vez más al resultado.

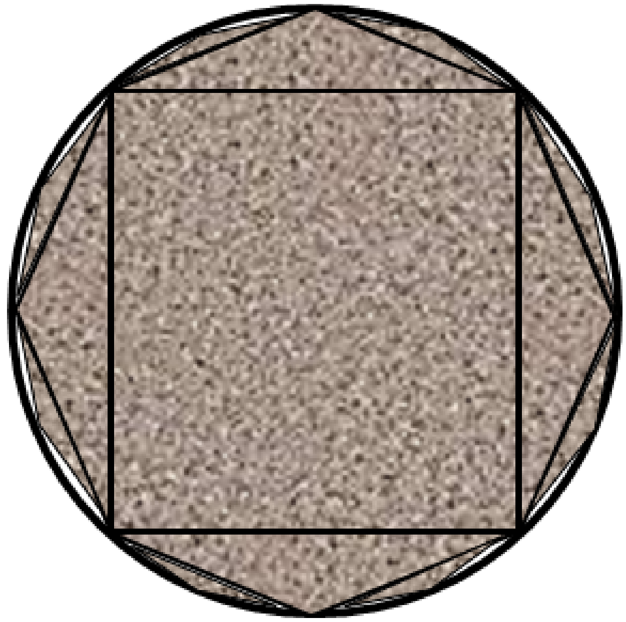


Figura 1.5 Área aproximada de una circunferencia con mayor precisión

Aunque cada vez que se agregaban figuras a la circunferencia facilmemte se puede observar que área no es exacta ya que siempre le faltara un espacio por cubrir, así sea mínimo pero siempre habrá un faltante de área por lo que en los inicios del cálculo esto era a lo que mas se aspiraba obtener del área de una figura amorfa o curva, sólo una aproximación al resultado.

1.2 Notación de Sumatoria

Como se pudo observar en el tema anterior, el uso de la operación de suma es de gran importancia ya que nos permitió aproximar el resultado del área, por lo que es necesario analizar una notación útil para la suma de números como

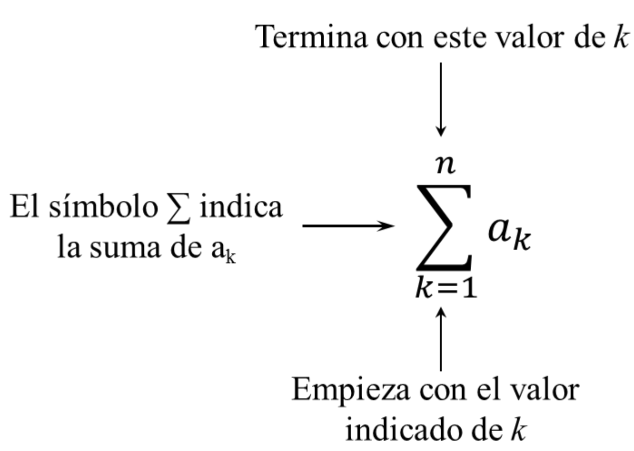
$$1+2+3+\ldots+n \quad \text{y} \quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

A la anterior operación se le denomina sumaria o notación de sumatoria y se suele usar una letra griega para denotar dicha simbología la cual recibe el nombre de Notación Sigma que se explica a continuación.

Notación sigma. Sea a_k un número real que depende de un entero k. La suma $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ se denota por el símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$; esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n \qquad (1.1)$$

Puesto que $\sum$ es la letra griega mayúscula sigma, (1.1) se denomina notación sigma o notación de suma. La variable k se denomina indice de la suma.



EJEMPLO 1 Uso de la notación sigma

Represente la suma de los diez primeros números enteros pares

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 18 + 20$$

$$\sum_{k=1}^{10} 2k$$

EJEMPLO 2 Uso de la notación sigma

Represente la suma de los diez primeros números enteros impares

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 17 + 19$$

$$\sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$$

El ídice de la suma no necesita empezar en el valor de k=1; por ejemplo,

$$\sum_{k=3}^{5} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 \qquad \text{y}$$

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

Observe que la suma del ejemplo 2 también puede escribirse como $\sum_{k=0}^{9} (2k + 1)$. Sin embargo, en un análisis general siempre se supone que el índice de la suma empieza en k=1. Esta suposición responde más a razones de conveniencia que de necesidad. Dicho índice de la suma a menudo se denomina variable ficticia, puesto que el símbolo en sí carece de importancia; lo que importa son los valores enteros sucesivos del índice y la suma correspondiente. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{m=1}^{n} a_m$$

Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{10} 4^k = \sum_{i=1}^{10} 4^i = \sum_{j=1}^{10} 4^j = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{10}$$

Propiedades de las sumatorias

Para enteros positivos *m* y *n,*

i) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$, donde c es cualquier constante (1.2)

ii) $\sum_{k=1}^{n} \left(a_k \pm b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$ (1.3)

iii) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_{k\,,\, m<n}$ (1.4)

Fórmulas de sumas

Para *n* un entero positivo y *c* cualquier constante,

i) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$ (1.5)

ii) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (1.6)

iii) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (1.7)

iv)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{1.8}$$

EJEMPLO 3 Uso de la notación sigma

Encuentre el valor numérico de $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2$

Solución: Al desarrollar $(k+5)^2$ y usar (1.5) y (1.6) se puede reescribir

$$\sum_{k=1}^{20}(k+5)^2 = \sum_{k=1}^{20}\left(k^2+10k+25\right) = \sum_{k=1}^{20}k^2 + 10\sum_{k=1}^{20}k$$

$$+\sum_{k=1}^{20}25 =$$

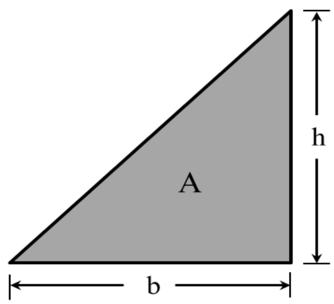
$$= \frac{20(20+1)(40+1)}{6} + 10\frac{20(20+1)}{2} + 20\cdot 25$$

$$= \frac{(20)\cdot(21)\cdot(41)}{6} + \frac{(10)\cdot(20)\cdot(21)}{2} + (20)\cdot(25)$$

$$= 5470$$

Área de un triángulo

Suponga por el momento que no se conoce ninguna fórmula para calcular el área A de un triángulo rectángulo tal como se muestra en la figura 1.6 a), si se superposiciona un sistema de coordenadas rectangulares sobre dicho triángulo se representaría de la siguiente forma, figura 1.6 b) :



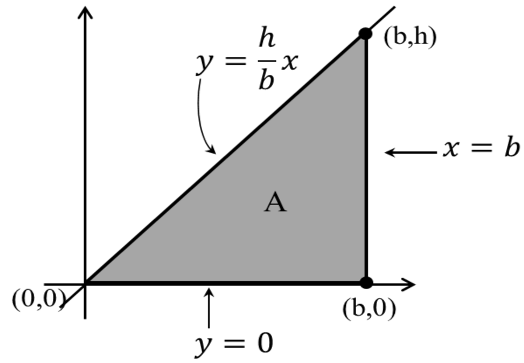


Figura 1.6 a) Triangulo rectángulo b) Triangulo rectángulo sobre un Plano Cartesiano

El problema de encontrar el área es el mismo que encontrar el área del primer cuadránte que se encuentra acotada por las líneas rectas de $y = \frac{h}{b}x$, $y = 0$, $x = b$. En otras palabras, se desea encontrar el área bajo la gráfica de $y = \left(\frac{h}{b}\right)x$ sobre el intervalo $[0, b]$.

Si se aplica el método del tema anterior de utilizar rectangulos sobre dicha área, existen tres formas de posicionar dichos rectángulos sobre el área del triángulo, los cuales se muestran acontinuación y por conveniencia se utiliza la primera de las siguientes figuras:

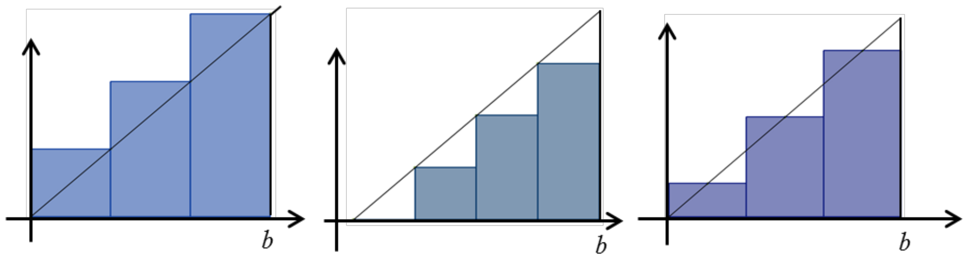


Figura 1.7 a) b)
c)

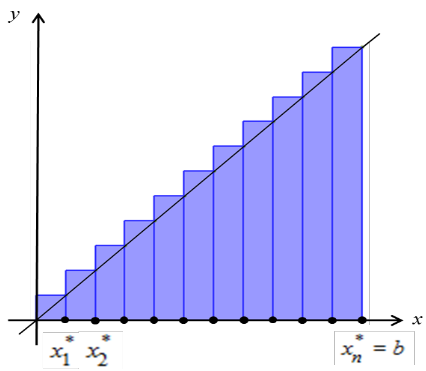
Si empezamos por dividir el intervalo $[0, b]$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = \frac{b}{n}$. El punto fronterizo derecho de estos intervalos se denota por x_k^*, entonces

$$x_1^* = \Delta x = \frac{b}{n}$$
$$x_2^* = 2\,\Delta x = 2\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$x_3^* = 3\,\Delta x = 3\left(\frac{b}{n}\right)$$
$$\vdots$$

$$x_n^* = n\,\Delta x = \mathrm{n}\left(\frac{b}{n}\right) = b \qquad (1.9)$$

Como se muestra en la figura 1.8 a), se construye un rectángulo de longitud $f\left(x_k^*\right)$ y ancho Δx sobre cada uno de los n subintervalos. Puesto que el área de un rectángulo es *largo* × *ancho,* el área de cada rectángulo es $f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x$. Vea la figura 1.8 b). La suma de las áreas de los n rectángulos es una aproximación al número A. Que se puede representar como:

$$A \approx f\left(x_1^*\right) \cdot \Delta x + f\left(x_2^*\right) \cdot \Delta x + \cdots + f\left(x_n^*\right) \Delta x \qquad (1.10)$$



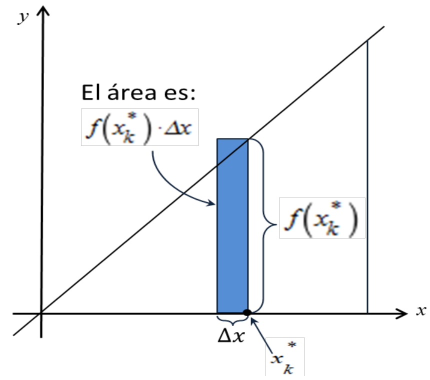


Figura 1.8 a) b)

Que en notación de sumatoria o sigma se representa

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x \qquad (1.11)$$

Si se observa la figura 1.7 a) con respecto a la figura 1.8 a) en ambas nos damos cuenta que estamos calculculando la misma área bajo la gráfica de la línea diagonal que forma el triángulo, sólo que en el primer caso se calcula con menos número de rectángulos mientras que en la segunda se usan un mayor número de rectángulos, por lo que es de suponerse que si se usa un número mayor de intervalos o rectángulos la aproximación al área del triángulo será cada vez más exacta. En otras palabras se espera que una mejor aproximación al área A del triángulo pueda obtenerse usando cada vez más y más rectángulos ($n \to \infty$) de anchos decrecientes ($\Delta x \to 0$).

Por otro lado si:

$$f(x)=\frac{h}{b}x,\quad x_k^*=k\left(\frac{b}{n}\right),\ f\left(x_k^*\right)=\frac{h}{n}\cdot k\quad \text{y}\quad \Delta x=\frac{b}{n},$$

de modo que con ayuda de la fórmula de sumatoria y los teoremas, tenemos:

$$A\approx\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{h}{n}\cdot k\right)\cdot\frac{b}{n}=\frac{b\cdot h}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{b\cdot h}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{b\cdot h}{2}$$

$$\cdot\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)=\frac{b\cdot h}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

.

Finalmente, al hacer $n\to\infty$ en el lado derecho de la ecuación anterior, obtenemos la fórmula conocida para el área de un triángulo:

$$A=\frac{b\cdot h}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{b\cdot h}{2}\left(1+\frac{1}{\infty}\right)=\frac{b\cdot h}{2}(1+0)$$

$$=\frac{b\cdot h}{2}$$

1.3 Sumas de Riemann

El problema del área

Pasaremos del problema específico al problema general de encontrar el área A bajo la gráfica de una función $f(x)=y$ que es continua sobre un intervalo $[a,b]$, para lo cual se puede hacer el uso de la suma de n rectángulos, tal como se explicó en el tema anterior y que se muestra en la figura 1.9.

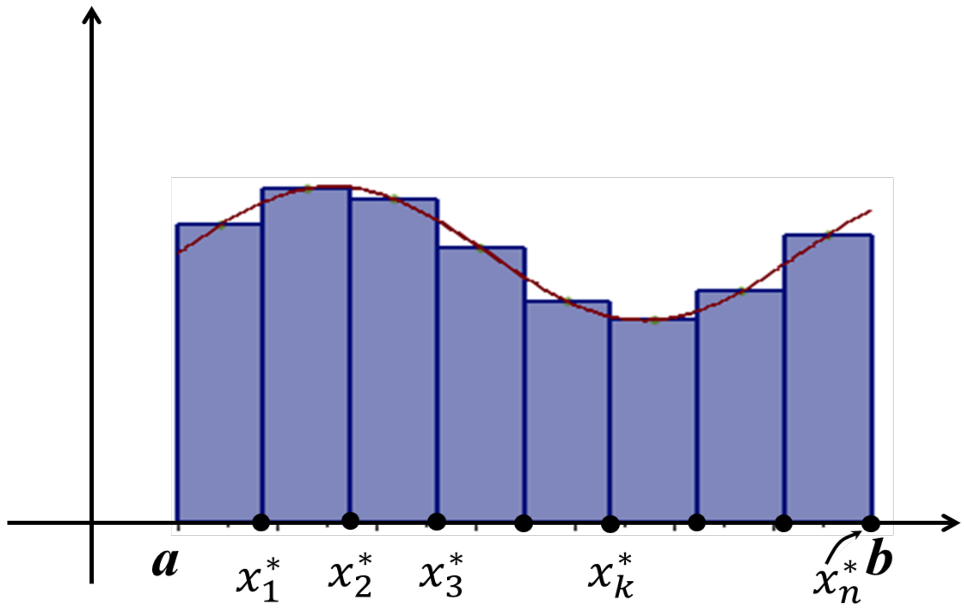


Figura 1.9 Área A bajo la gráfica de n rectangulos

Para este problema general se sigue la misma lógica, sin embargo debe observar que el intervalo ya no empieza en el origen por lo que el valor de Δx cambia, así como el valor de $f\left(x_k^*\right)$, tal como se muestra acontinuación.

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

$$x_k^* = a + k \cdot \Delta x = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

Luego, para $k = 1, 2, 3, ..., n$ tenemos

$$x_1^* = a + \Delta x = a + \frac{b-a}{n}$$

$$x_2^* = a + 2\,\Delta x = a + 2\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$x_3^* = a + 3\,\Delta x = a + 3\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$\vdots$$
$$x_n^* = \mathrm{a} + \mathrm{n}\,\Delta \mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) = b$$

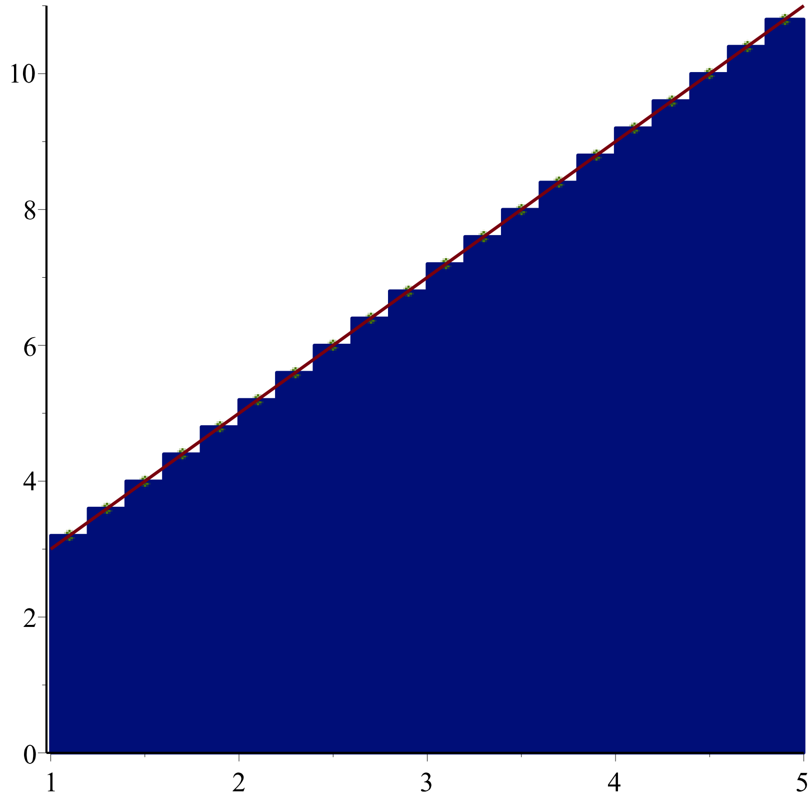
Al sustituir estos valores se puede obtener la siguiente ecuación que nos proporciona el área bajo la gráfica en el intervalo $[a, b]$.

$$A \approx \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x \tag{1.12}$$

$$A \approx \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{(b-a)}{n} \tag{1.13}$$

EJEMPLO 4 Encuentre el área bajo la curva de la siguiente función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

$f(x) = 2x + 1$, en el intervalo $[1, 5]$



$$\Delta x = \frac{5-1}{n} \qquad\qquad x_k^* = 1 + \frac{4}{n}k$$

$$A \approx \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(1 + \frac{4}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\left(1 + \frac{4}{n}\right) + 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2 + \frac{8}{n}k + 1\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(3 + \frac{8}{n}k\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{8}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \left(3\,n + \frac{8}{n} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4}{n}\left(3\,n + \frac{8}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{12\,n}{n} + \frac{16 \cdot n(n+1)}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} 12 + \lim_{n \to \infty}\left(16\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = 12 + 16 = 28\,u^2$$

1.4 La integral definida

Se tiene interés en un tipo especial de límite de $\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x_k$. Si las sumas de Riemann están próximas a un número L para toda partición P de $[a, b]$ para la cual la norma $\|P\|$ esté cerca de cero, entonces escribimos

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x_k = L \tag{1.14}$$

y se dice que L es la **integral definida** de f sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. En la siguiente definición se introduce un nuevo símbolo para el número L.

Definición 1 La integral definida

Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la **integral definida** de f de $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, que se denota por $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$, se define como

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \cdot \Delta x_k$$

(1.15)

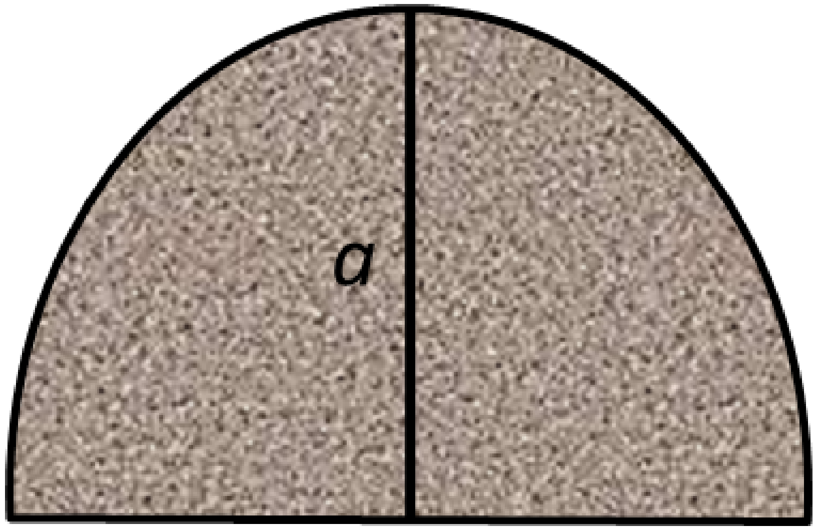
Si el límite en (1.15) existe, se dice que la función *f* es **integrable** sobre el intervalo. Los números *a* y *b* en la definición anterior se denominan límite inferior y límite superior de integración, respectivamente. La función *f* se denomina integrandoEl símbolo integral ∫ , según lo usaba Leibniz, es una S alargada que representa la palabra suma.

EJEMPLO 5 El área como integral definida. Considere la integral definida $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\ \mathrm{d}x$

El integrando es contínuo y no negativo, de modo que la integral definida representa el área bajo la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sobre el intervalo $[-1, 1]$. Debido a que la gráfica de la función es el semicirculo superior de $x^2 + y^2 = 1$ el área bajo la gráfica es la región sombreada en la figura 1.10. Por geometría sabemos que el área de un círculo de radio *r* es $\pi \cdot r^2$, y así con $r = 1$ el área del semicirculo y por tanto el área de la integral definida es,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi(1)^2 = \frac{1}{2}\pi$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$



−1

1

Figura 1.10 Área bajo la gráfica del ejemplo 5

Diferenciales

Diferenciales de funciones elementales

Tipo I

$$\frac{d}{dx}\frac{2x}{\sqrt{3x}}$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} \tag{1.1.5.1.1.1}$$

Tipo II

$$\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{3e^{2x}}\right)$$

$$2\sqrt{3}\,\sqrt{e^{2x}} \tag{1.1.5.1.2.1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(2^{x}\right)$$

$$2^{x}\ln(2) \tag{1.1.5.1.2.2}$$

Tipo III

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-\ln(x)}{5}\right)$$

$$-\frac{1}{5x} \tag{1.1.5.1.3.1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos(x)}{4}\right) = -\frac{1}{4}d(\cos(x)) = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-sen(x))dx$$

$$\frac{1}{4}\sin(x) \tag{1.1.5.1.1}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan(x))$$

$$1+\tan(x)^2 \tag{1.1.5.1.2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{6\arcsin(x)}{5}\right)$$

$$\frac{6}{5\sqrt{-x^2+1}} \tag{1.1.5.1.3}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsinh}(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \tag{1.1.5.1.4}$$

Diferenciales de funciones que contienen x^n

Difrenciales de funciones que contienen u

Ejercicios de Unidad I Teorema Fundamental del Cálculo

Tipo I. En los siguientes problemas desarrolle la suma indicada

1) $\sum_{k=1}^{5} 3\,k = 3 + 6 + 9 + 12 + 15$

$$45 \qquad \textbf{(1.1.6.1.1)}$$

2)
$\sum_{k=1}^{5} (2\,k - 3) = ((2)\cdot(1)-3) + ((2)\cdot(2) - 3) + ((2)\cdot(3) - 3) + ((2)\cdot(4) - 3) + ((2)\cdot(5) - 3) = -1 + 1 + 3 + 5 + 7$

$$15 \qquad \textbf{(1.1.6.1.2)}$$

3) $\sum_{k=1}^{4} \frac{2^k}{k} = \frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{4} = 2 + 2 + \frac{8}{3} + 4$

$$\frac{32}{3} \qquad \textbf{(1.1.6.1.3)}$$

4)
$\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{3}{10}\right)^k = \left(\frac{3}{10}\right)^1 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \left(\frac{3}{10}\right)^4 = \frac{3}{10} + \frac{9}{100} + \frac{27}{1000} + \frac{81}{10000}$

$$\frac{4251}{10000} \qquad \textbf{(1.1.6.1.4)}$$

5)

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^k}{2k+5} = \frac{(-1)^1}{(2)(1)+5} + \frac{(-1)^2}{(2)(2)+5} + \frac{(-1)^3}{(2)(3)+5} + \frac{(-1)^4}{(2)(4)+5} + \frac{(-1)^5}{(2)(5)+5} + \frac{(-1)^6}{(2)(6)+5} + \frac{(-1)^7}{(2)(7)+5} + \frac{(-1)^8}{(2)(8)+5} + \frac{(-1)^9}{(2)(9)+5} + \frac{(-1)^{10}}{(2)(10)+5}$$

$$-\frac{103848574}{1673196525} \qquad \textbf{(1.1.6.1.5)}$$

6)

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{(-1)^{1-1}}{1^2} + \frac{(-1)^{2-1}}{2^2} + \frac{(-1)^{3-1}}{3^2} + \frac{(-1)^{4-1}}{4^2} + \frac{(-1)^{5-1}}{5^2} + \frac{(-1)^{6-1}}{6^2} + \frac{(-1)^{7-1}}{7^2} + \frac{(-1)^{8-1}}{8^2} + \frac{(-1)^{9-1}}{9^2} + \frac{(-1)^{10-1}}{10^2}$$

$$\frac{5194387}{6350400} \qquad \textbf{(1.1.6.1.6)}$$

7)

$$\sum_{j=2}^{5} (j^2 - 2j) = (2^2 - 2(2)) + (3^2 - 2(3)) + (4^2 - 2(4)) + (5^2 - 2(5)) = (4-4) + (9-6) + (16-8) + (25-10) = 0 + 3 + 8 + 15$$

$$26 \qquad \textbf{(1.1.6.1.7)}$$

8)

$$\sum_{m=0}^{4} (m+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + (4+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

$$55 \qquad \textbf{(1.1.6.1.8)}$$

9)

$$\sum_{k=1}^{5} \cos(k\cdot\pi) = \cos(\pi) + \cos(2\cdot\pi) + \cos(3\cdot\pi) + \cos(4\cdot\pi) + \cos(5\cdot\pi) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

$$-1 \qquad \textbf{(1.1.6.1.9)}$$

10)

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{\sin\left(\frac{k\cdot\pi}{2}\right)}{k} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1} + \frac{\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)}{3} + \frac{\sin\left(\frac{4\cdot\pi}{2}\right)}{4} + \frac{\sin\left(\frac{5\cdot\pi}{2}\right)}{5} = 1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5}$$

$$\frac{13}{15} \qquad \textbf{(1.1.6.1.10)}$$

Tipo II. En los siguientes problemas encuentre el valor numérico de la suma dada

1) $\sum_{k=1}^{20} 2\,k = 2\sum_{k=1}^{20} k = \frac{2\cdot(20)(21)}{2}$

$$420 \quad \textbf{(1.1.6.2.1)}$$

2) $\sum_{k=0}^{50} (-3\,k)$

$$-3825 \quad \textbf{(1.1.6.2.2)}$$

3) $\sum_{k=1}^{10} (k+1)$

$$65 \quad \textbf{(1.1.6.2.3)}$$

4) $\sum_{k=1}^{1000} (2\,k-1)$

$$1000000 \quad \textbf{(1.1.6.2.4)}$$

5) $\sum_{k=1}^{6} (k^2+3)$

$$109 \quad \textbf{(1.1.6.2.5)}$$

6) $\sum_{k=1}^{5} (6\,k^2-k)$

$$315 \quad \textbf{(1.1.6.2.6)}$$

7) $\sum_{p=3}^{10} \left(p^3+4\right)$

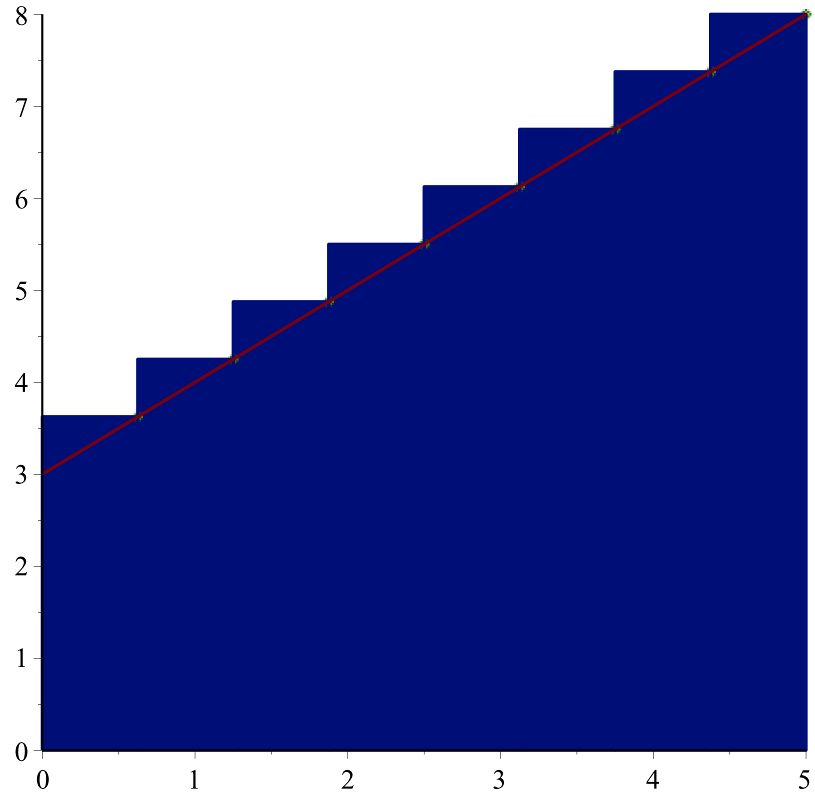
$$3048 \quad \textbf{(1.1.6.2.7)}$$

8) $\sum_{i=1}^{10} (2\,i^3-5\,i+)$

Tipo III. En los siguientes problemas encuentra el área bajo la curva de $f(x)$ en el intervalo dado.

1) $x+3;\quad [0,5]$

El área bajo la curva que se desea encontrar es la siguiente:



$$\Delta x = \frac{5}{n} \qquad x_k^* = k\Delta x = \frac{5}{n}k$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{5}{n}k\right)\frac{5}{n} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{n} k + 3 \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5}{n} \left[\frac{5}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3 \right]$$

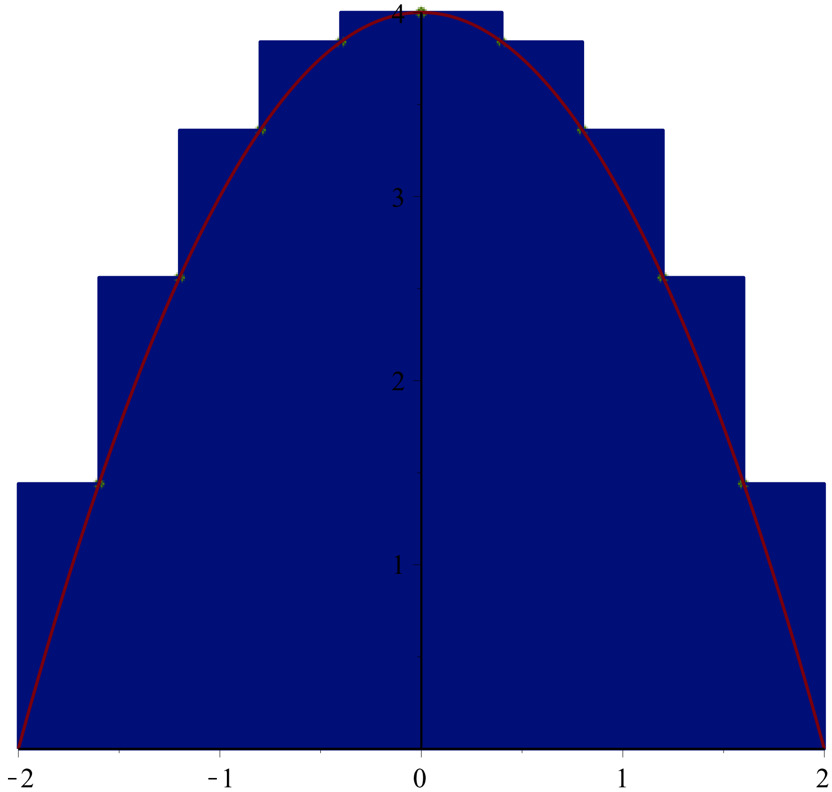
$$\lim_{n \to \infty} \frac{5}{n} \left[\frac{5}{n} \frac{n(n+1)}{2} + 3n \right]$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{25}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right) + 15 \right) = \frac{55}{2}$$

$$\approx 27.5\, u^2$$

2) $4 - x^2$; $\quad [-2, 2]$

El área bajo la curva que se desea calcular es la siguiente:



$$\Delta x = \frac{2-(-2)}{n} = \frac{4}{n}$$

$$x_k^* = -2 + k\Delta x = -2 + \frac{4}{n}k$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(-2 + \frac{4}{n}k\right)\cdot\frac{4}{n} =$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[4 - \left(-2 + \frac{4}{n} k \right)^2 \right]$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[4 - \left(4 - \frac{16}{n} k + \frac{16}{n^2} k^2 \right) \right]$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(4 - 4 + \frac{16}{n} k + \frac{16}{n^2} k^2 \right)$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{16}{n} k + \frac{16}{n^2} k^2 \right)$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \left[\frac{16}{n} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{16}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right]$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n} \left[\frac{16}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{16}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \left[32 \frac{n(n+1)}{n^2} + \frac{32}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \right]$$